

Université de Montréal

**Les oscillations torsionnelles dans la zone de convection solaire**

par  
Patrice Beaudoin

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

Février, 2012

© Patrice Beaudoin, 2012.

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Les oscillations torsionnelles dans la zone de convection solaire**

présenté par:

Patrice Beaudoin

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

|                   |                        |
|-------------------|------------------------|
| Gilles Fontaine,  | président-rapporteur   |
| Paul Charbonneau, | directeur de recherche |
| David Lafrenière, | membre du jury         |

Mémoire accepté le: 30 mars 2012

## RÉSUMÉ

Nous analysons les oscillations torsionnelles se développant dans une simulation magnétohydrodynamique de la zone de convection solaire produisant des champs magnétiques de type solaire (champs axisymétriques subissant des inversions de polarités régulières sur des échelles temporelles décennales). Puisque ces oscillations sont également similaires à celles observées dans le Soleil, nous analysons les dynamiques zonales aux grandes échelles. Nous séparons donc les termes aux grandes échelles (force de Coriolis exercée sur la circulation méridienne et les champs magnétiques aux grandes échelles) de ceux aux petites échelles (les stress de Reynolds et de Maxwell). En comparant les flux de moments cinétiques entre chacune des composantes, nous nous apercevons que les oscillations torsionnelles sont maintenues par l'écoulement méridien aux grandes échelles, lui-même modulé par les champs magnétiques. Une analyse d'échange d'énergie confirme ce résultat, puisqu'elle montre que seul le terme comprenant la force de Coriolis injecte de l'énergie dans l'écoulement. Une analyse de la dynamique rotationnelle ayant lieu à la limite de la zone stable et de la zone de convection démontre que celle-ci est fortement modifiée lors du passage de la base des couches convectives à la base de la fine tachocline s'y formant juste en-dessous. Nous concluons par une discussion au niveau du mécanisme de saturation en amplitude dans la dynamo s'opérant dans la simulation ainsi que de la possibilité d'utiliser les oscillations torsionnelles comme précurseurs aux cycles solaires à venir.

**Mots clés:** Zone de convection, Magnétohydrodynamique, Oscillations : solaires.

## **ABSTRACT**

We study torsional oscillations developping in a magnetohydrodynamic simulation of the solar convective layers producing solar-like magnetic cycles (large-scale axisymmetric fields subjected to regular polarity reversals). Since these oscillations are similar to those observed in the Sun, we perform an analysis of large-scale zonal dynamics. We separate the large-scale terms (Coriolis force exerted on the meridional circulation and large-scale magnetic fields) from the small-scale contributions (Reynolds and Maxwell stresses). Upon comparing angular momentum fluxes between each of those components, we find that torsional oscillations are driven by the large-scale meridional flow, itself modulated by magnetic fields. An analysis of energy transfers confirms this result, where we see that only the Coriolis force term directly inputs energy in the flow. An analysis of angular momentum fluxes occuring at the interface between the stable and the convective zones shows that the local dynamics therein undergoes a complete shift in going from the base of the convective layers through the base of the thin tachocline developping just beneath it. We conclude by discussing the mechanism of amplitude saturation in the dynamo operating in the simulation and the possibility of using torsional oscillations as precursors to upcoming solar cycles.

**Keywords : Convection Zone, Magnetohydrodynamics, Oscillations : Solar.**



## TABLE DES MATIÈRES

|  |             |
|--|-------------|
| <b>RÉSUMÉ</b>  | <b>iii</b>  |
| <b>ABSTRACT</b>  | <b>iv</b>   |
| <b>TABLE DES MATIÈRES</b>                                | <b>v</b>    |
| <b>LISTE DES TABLEAUX</b>                                | <b>vii</b>  |
| <b>LISTE DES FIGURES</b>                                 | <b>viii</b> |
| <b>LISTE DES ANNEXES</b>                                 | <b>x</b>    |
| <b>LISTE DES SIGLES</b>                                  | <b>xi</b>   |
| <b>REMERCIEMENTS</b>                                     | <b>xii</b>  |
| <b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION</b>                         | <b>1</b>    |
| 1.1 Le Soleil : un astre à connaître !                   | 2           |
| 1.1.1 Le Soleil en toute généralité                      | 2           |
| 1.1.2 Taches solaires et champs magnétiques              | 5           |
| 1.2 Phénomène à l'étude : les oscillations torsionnelles | 10          |
| 1.2.1 Définition   | 10          |
| 1.2.2 L'héliosismologie et les ondes acoustiques         | 11          |
| 1.2.3 Représentation des oscillations torsionnelles      | 14          |
| 1.3 À la quête de la compréhension                       | 18          |
| 1.4 Le modèle MHD  | 21          |
| 1.4.1 Caractéristiques de la simulation                  | 21          |
| 1.4.2 Résultats généraux                                 | 24          |
| 1.5 Contribution   | 29          |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CHAPITRE 2 :    TORSIONAL OSCILLATIONS IN A GLOBAL SOLAR DY-</b> |           |
| <b>                      NAMO . . . . .</b>                         | <b>32</b> |
| <b>ABSTRACT . . . . .</b>   | <b>33</b> |
| 2.1    Introduction . . . . .                                       | 34        |
| 2.2    Numerical data . . . . .                                     | 36        |
| 2.2.1    The global simulation . . . . .                            | 36        |
| 2.2.2    The mean differential rotation . . . . .                   | 40        |
| 2.2.3    The torsional oscillations . . . . .                       | 43        |
| 2.3    The dynamical drivers of torsional oscillations . . . . .    | 47        |
| 2.3.1    The zonal momentum equation . . . . .                      | 47        |
| 2.3.2    Angular momentum fluxes . . . . .                          | 50        |
| 2.3.3    Volumetric force densities . . . . .                       | 58        |
| 2.3.4    Energetics of the torsional oscillations . . . . .         | 62        |
| 2.4    Concluding remarks . . . . .                                 | 65        |
| <b>CHAPITRE 3 :    CONCLUSION . . . . .</b>                         | <b>68</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>                                      | <b>70</b> |

## LISTE DES TABLEAUX

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.I | Ressemblances et différences entre les observations et les résultats<br>de la simulation . . . . .         | 29 |
| 2.I | Mean powers obtained upon averaging in time the terms in Eq. (2.24)<br>for two integration ranges. . . . . | 64 |

## LISTE DES FIGURES

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Représentation graphique de la rotation différentielle dans une coupe polaire du Soleil . . . . .                             | 3  |
| 1.2  | Granulation à la surface du Soleil . . . . .  | 4  |
| 1.3  | "Diagramme papillon" solaire . . . . .  | 8  |
| 1.4  | Représentation imagée de paires de taches solaires à la surface du Soleil . . . . .   | 9  |
| 1.5  | Représentation historique du nombre de taches à la surface du Soleil  | 10 |
| 1.6  | Diagrammes latitude-temps d'une oscillation torsionnelle . . . . .  | 16 |
| 1.7  | Diagrammes rayon-temps d'une oscillation torsionnelle . . . . .   | 17 |
| 1.8  | Représentation latitude-temps du champ magnétique toroïdal sur des sphères de différents rayons . . . . .                     | 25 |
| 1.9  | Représentation rayon-temps du champ magnétique toroïdal sur des cônes de différentes latitudes . . . . .                      | 26 |
| 1.10 | Représentation latitude-temps du résidu de la vitesse angulaire sur des sphères de différents rayons . . . . .                | 28 |
| 1.11 | Représentation rayon-temps du résidu de la vitesse angulaire sur des cônes de différentes latitudes . . . . .                 | 30 |
| 2.1  | Representations of the zonally-averaged toroidal magnetic fields. .   | 39 |
| 2.2  | Representations of the angular velocity in HD and MHD simulations.  | 42 |
| 2.3  | Time-latitude diagrams of the zonally-averaged perturbation in rotational frequency. . . . .                                  | 45 |
| 2.4  | Time-radius diagrams of the zonally-averaged perturbation in rotational frequency. . . . .                                    | 46 |
| 2.5  | A close up on the time-latitude diagram of Fig. 2.3D, showing the zonally-averaged rotational frequency perturbation. . . . . | 47 |
| 2.6  | A four panels diagram showing angular momentum flux contributions. . . . .  | 51 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.7  | Temporal evolution of the various radial angular momentum flux contributions sampled at a 9 yr cadence between 54 and 90 yr. . .  | 55 |
| 2.8  | Temporal evolutions of angular momentum fluxes for each contribution, with two panels showing the net radial angular momentum transport rate through spherical shells and two others showing the mean latitudinal flux. . . . . | 57 |
| 2.9  | Two representations of temporal evolution of the volumetric force density applied on the plasma. . . . .  | 60 |
| 2.10 | Phase diagrams of the perturbation in latitudinal velocity plotted vs. the perturbation in longitudinal velocity for two depths and four latitudes. . . . .   | 61 |
| 2.11 | Temporal evolution of the power of various force contributions at the south pole of the Sun, integrated for $-90^\circ < \theta < -60^\circ$ . . . .  | 64 |

## **LISTE DES ANNEXES**

|                    |   |             |
|--------------------|---|-------------|
| <b>Annexe I :</b>  | <b>Équations MHD moyennées en longitude . . . . .</b> | <b>xiii</b> |
| <b>Annexe II :</b> | <b>Développement des puissances . . . . .</b>         | <b>xix</b>  |

## **LISTE DES SIGLES**

|       |                                    |
|-------|------------------------------------|
| EULAG | Eulerian-LAGRangian                |
| GONG  | Global Oscillation Network Group   |
| HD    | Hydrodynamique                     |
| LHS   | Left-Hand Side                     |
| MDI   | Michelson Doppler Imager           |
| MHD   | Magnétohydrodynamique              |
| OLA   | Optimally Localized Averaging      |
| RHS   | Right-Hand Side                    |
| RLS   | Regularized Least Squares          |
| SOHO  | Solar and Heliospheric Observatory |

## **REMERCIEMENTS**

Je souhaite remercier d'abord et avant tout mon directeur de recherche, Paul Charbonneau, pour m'avoir accueilli dans son groupe de recherche et m'avoir guidé à travers ce projet de longue haleine. Ses talents de communicateur et sa passion incommensurable pour le sujet m'ont grandement aidé à réaliser cet ouvrage.

Je voudrais également remercier ma famille et mes amis pour m'avoir supporté pendant tout ce long procédé. Vos encouragements ne sont pas tombés dans l'oreille d'un sourd et m'ont souvent aidé à persévérer dans mon domaine.

Finalement, j'aimerais remercier tous les membres du Groupe de Recherche en Physique Solaire pour votre support. J'ai apprécié discuter avec vous de nos divers projets de recherche. J'aime également vos mines sympathiques et je pense (toujours) que nous représentons le meilleur groupe de recherche solaire au monde !



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Les oscillations torsionnelles sont des phénomènes encore peu compris : cela ne fait que quelques années que nous les observons avec régularité... L'article principal de ce mémoire se veut une modeste contribution à la compréhension globale de leur existence et de leur impact sur la structure du Soleil. Avant d'aborder l'article, il faut établir les bases sur lesquelles repose ce travail. Pour cela, une large introduction du sujet est faite dans les premières pages.

Tout d'abord, il est question du Soleil en général et de ses caractéristiques (§ 1.1). En particulier, ses paramètres principaux et sa structure sont décrits en détail (§ 1.1.1) et le lien étroit entre la dynamique solaire et la présence de champs magnétiques est établi (§ 1.1.2).

Ensuite, une courte introduction au phénomène des oscillations torsionnelles est discutée (§ 1.2). Puis, les recherches antérieures dans le domaine de la physique solaire (en particulier dans la dynamique de la zone convective) sont décortiquées (§ 1.3). Des exemples de modèles théoriques seront présentés dans cette section.

Une présentation du modèle sur lequel se basent les analyses présentées dans l'article s'impose (§ 1.4). Son fonctionnement est d'abord décrit (§ 1.4.1), puis quelques résultats découlant directement de l'exécution de la simulation sont affichés, tout en expliquant pourquoi ce modèle est utile pour la présente recherche (§ 1.4.2). Également, une courte section sur mes contributions à la recherche (§ 1.5) est ajoutée pour conclure l'introduction.

Suite à cette introduction suivra l'article soumis à la revue Solar Physics et qui constitue le cœur de ce mémoire (§ 2). Il y aura finalement une conclusion à l'article (§ 3).

## 1.1 Le Soleil : un astre à connaître !

*"Soleil (n. masc, latin populaire soliculus, du latin classique sol, solis) : Étoile autour de laquelle gravite la Terre."*

- *Le petit Larousse*

Cette définition simpliste est certainement insuffisante pour expliquer l'astre sur lequel se base la recherche présentée dans ce mémoire. Voyons voir s'il est possible de faire mieux en quelques paragraphes...

### 1.1.1 Le Soleil en toute généralité

Le Soleil est une étoile de type naine jaune et se situe sur la séquence principale (i.e. sur le chemin évolutif "normal" d'une étoile). Il est composé principalement d'un plasma d'hydrogène (74% de sa masse) et d'hélium (24%), le reste étant divisé en plusieurs fractions d'éléments lourds. Sa température effective est d'environ 5800 K. Comme toutes les étoiles, il gravite autour du centre de notre galaxie : la Voie Lactée. Il tourne également sur lui-même, ayant une période de rotation *moyenne* d'environ 27 jours terrestres. La période est dite moyenne puisque le Soleil, n'étant pas un corps solide, ne tourne pas à la même vitesse à toutes les latitudes dans ses hautes couches : sa rotation est plus rapide à l'équateur (période d'environ 25 jours) qu'aux pôles (35 jours). Ce dernier phénomène s'appelle la *rotation différentielle*. La Figure 1.1 illustre cette stratification de vitesses.

Nous pouvons diviser le Soleil en 5 couches distinctes : le noyau, la zone radiative, la zone convective, la photosphère et l'atmosphère solaire.

Le noyau s'étend du centre de l'étoile jusqu'à environ 25% de son rayon. Le milieu y est très dense ( $\sim 150 \text{ g/cm}^3$ ). C'est dans cette région que l'énergie de l'astre est produite, via la fusion nucléaire.

La zone radiative comprend la région située de 25% à 70% du rayon solaire. C'est dans cette région que l'énergie est propagée radiativement vers l'extérieur de l'étoile, la température du plasma y étant encore très élevée. Notons aussi que du centre du Soleil

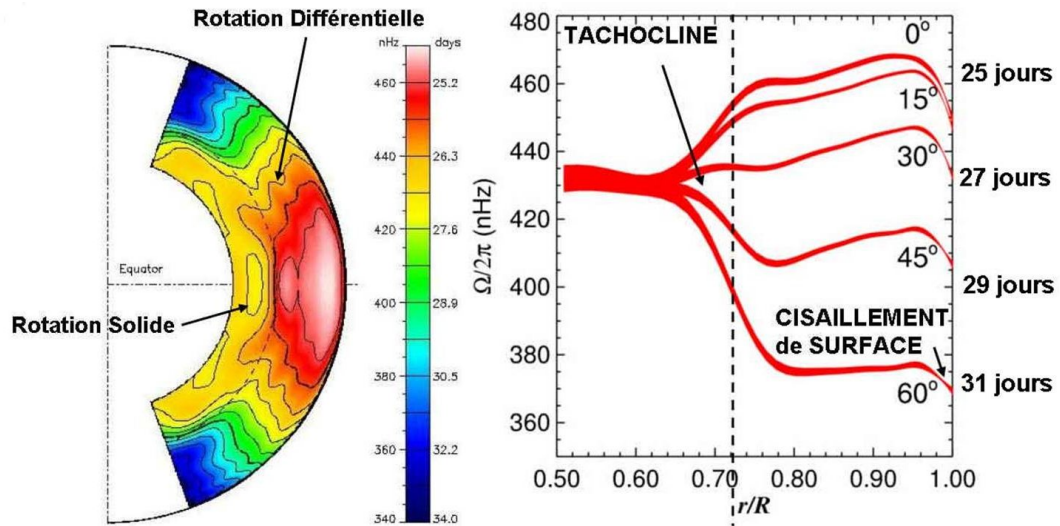


Figure 1.1 – Représentation graphique de la rotation différentielle dans une coupe polaire du Soleil. Dans le graphique de gauche, la vitesse du plasma est plus élevée dans les régions rouges que les régions bleues. Le graphique de droite montre des courbes de vitesses à différentes latitudes selon la profondeur. Ils ont été obtenus avec l’usage de divers instruments d’héliosismologie, discipline dont il sera discuté ultérieurement. Image tirée de [http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast\\_visu.php?id\\_ast=1283](http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_visu.php?id_ast=1283) et téléchargée en date du mois de juin 2011.

jusqu’à  $r/R = 0.7$ , il n’y a pas ou peu de rotation différentielle ! En effet, il n’y a aucun forçage externe pour générer cette rotation différentielle. Nous appelons cet endroit la *région stable*. Ce n’est seulement qu’à partir de la zone convective que nous observons la variation de vitesse angulaire selon la latitude. La limite séparant ces deux régions s’appelle la *tachocline*.

La zone convective s’étend de 70% du rayon solaire jusqu’à très près de la surface. Dans cette région, le transport d’énergie se fait par convection. C’est ici que nous notons les phénomènes de granulation et de supergranulation, c’est-à-dire l’observation à la surface du Soleil de régions intensément brillantes entourées de zone plus sombres. Les régions brillantes représentent la matière chaude montant vers la surface et les endroits adjacents plus sombres indiquent la matière froide retombant à l’intérieur de l’astre. La Figure 1.2 montre ce phénomène. C’est une image d’une parcelle de la surface solaire représentant un peu plus de  $\sim 0.01\%$  de la surface totale. Nous y voyons clairement les

cellules claires et sombres formant la granulation causée par la convection. Bien que les cellules semblent être relativement petites en surface, ce n'est pas le cas en profondeur de la zone de convection. À titre d'exemple, à  $r/R = 0.8$ , les cellules convectives ont une taille d'environ  $0.1 R_{\odot}$  ( $R_{\odot}$  signifie rayon solaire) et leur temps de vie est approximativement un mois (terrestre).

La photosphère, pour sa part, est la couche en dessous de laquelle le Soleil devient opaque à la lumière visible. Elle se situe assez près de la surface et a une centaine de kilomètres d'épaisseur. Quand des observations sur le Soleil sont faites, c'est la photosphère qui est observée.

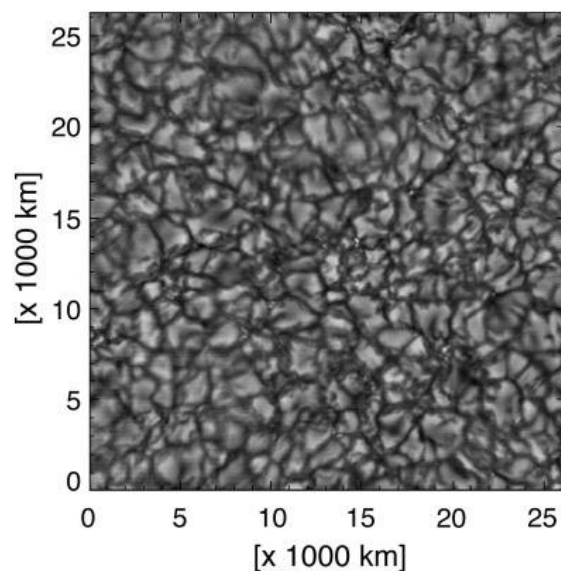


Figure 1.2 – Granulation à la surface du Soleil. Données prises par le National Optical Astronomy Observatory (NOAO). Cette image a été obtenue dans le spectre continu. Le plasma voyage par convection vers la surface dans les régions claires plus chaudes et retombe à l'intérieur dans les régions sombres plus froides. Image tirée de <http://www.nhn.ou.edu/~jeffery/astro/sun/sun.html> et téléchargée en date du mois de juin 2011.

Finalement, l'atmosphère solaire est divisée en 5 sous-sections : la couche de température minimale, la chromosphère, la région de transition, la couronne et l'héliosphère.

La couche de température minimale est assez froide pour permettre la formation de molécules simples. La chromosphère est une région colorée visible au début et à la

fin des éclipses totales du Soleil. La température y est très élevée (jusqu'à 20 000 K). Dans la région de transition, la température augmente rapidement de 20 000 K jusqu'à 1 000 000 K. Elle n'est pas clairement définie, étant très mince ( $\sim 200$  km) et constamment soumise à des mouvements chaotiques. La couronne est excessivement chaude (ayant des températures pouvant atteindre 20 000 000 K) et est la partie visible à l'oeil nu lors des éclipses totales du Soleil. Une partie de la chaleur alimentant la couronne provient des reconnections magnétiques (les lignes d'un champ sont divisées en d'autres et changent de comportement par la suite). C'est de cette couche qu'originent les vents solaires. Enfin, l'héliosphère s'étend de  $r/R \simeq 20$  jusqu'aux confins du système solaire. Elle contient les vents solaires magnétisés éjectés par la couronne.

## **1.1.2 Taches solaires et champs magnétiques**

### **1.1.2.1 Une histoire magnétique**

Les taches solaires représentent le premier indicateur de la présence de champs magnétiques à la surface du Soleil. En effet, c'est à ces endroits que les lignes de champs magnétiques traversent la surface, contraignant le mouvement du plasma et abaissant légèrement sa température. Le Soleil *irradie* donc moins à ces endroits qu'ailleurs, faisant apparaître ces endroits plus sombres. Fait intéressant, si nous mettions ces taches ailleurs que sur le Soleil (disons dans le vide interstellaire), elles apparaîtraient presque aussi brillantes que l'astre en question !

La plus ancienne observation d'une tache solaire remonte approximativement à l'an -165, en Chine. Selon les inscriptions, la brillance du Soleil était atténuée par la présence d'un brouillard ou bien par la présence de fines poussières dans l'atmosphère. Par la suite, plusieurs autres observations ont été répertoriées en territoire chinois et coréen, mais les relevés sont très épars. Ceci est probablement une conséquence liée aux prévisions astrologiques puisqu'à cette époque la présence d'une tache sur la surface du disque solaire était associée à un malheur imminent à la classe régnante ! D'autres taches ont été observées en Russie en 1371. Des chroniques russes rapportent que cette observation a été possible grâce à la fumée d'un feu de forêt qui tamisait la lumière émise par

le Soleil.

Ce n'est qu'au début du XVII<sup>e</sup> siècle que l'on commença véritablement à s'intéresser aux taches solaires. Entre autre, Kepler en observa une en 1607 en pensant qu'il s'agissait du transit de Mercure. Il réalisera plus tard que c'était en fait une tache solaire. L'arrivée du télescope dans ces années permit une meilleure étude du disque solaire (au détriment des yeux des pauvres astronomes). En 1610, Galilée nota plusieurs endroits sombres éphémères ainsi que des taches traversant le disque solaire en près de deux semaines. Cela lui permit d'estimer la période de rotation du Soleil : il s'en servit pour prouver que le Soleil est un corps en rotation et non pas immuable, contrant la croyance populaire instaurée par Aristote durant l'Antiquité. Christoph Scheiner observa lui aussi les taches solaires, mais sur une période plus longue (de 1611 à 1627). Il observait par projection de l'image renvoyée par le télescope sur un écran, contrairement à Galilée qui regardait le Soleil directement à travers l'instrument (du moins, au début).

Des disputes émergèrent entre les deux chercheurs, surtout sur un point en particulier. Scheiner croyait que les taches étaient en fait des petites planètes en transit (en particulier au commencement de ses observations), tandis que Galilée pensait que les taches se trouvaient bel et bien sur la surface solaire en raison de leur déformation près des bords du disque.

Les observations des deux astronomes ont permis de noter plusieurs aspects intéressants concernant les taches dans les années suivantes. Premièrement, on remarquait que l'équateur solaire était incliné par rapport au plan orbital de la Terre autour du Soleil. Deuxièmement, toutes les taches observées se situaient entre  $-30^\circ$  et  $30^\circ$  en latitude. Finalement, près des bords du disque solaire, on notait la présence d'endroits brillants, appelés *facules* aujourd'hui.

Par la suite, peu de progrès furent enregistrés avant le XIX<sup>e</sup> siècle. Heinrich Schwabe consigna le nombre de taches solaires observées entre 1826 et 1843 pour chaque année et en arriva à la conclusion que ce nombre est périodique dans le temps, cette périodicité étant d'environ 11 années. Il découvrit également que les taches sont groupées et apparaissent en paires. La périodicité fut confirmée par Rudolf Wolf lorsqu'il étudia les données compilées d'environ l'an 1700 jusqu'au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle : on put alors

parler du cycle solaire. Finalement, à la même époque, Richard Carrington, un astronome amateur, et Gustav Spörer constatèrent indépendamment la migration des taches vers l'équateur à mesure que le cycle progressait. C'est à eux que revient formellement la découverte de la rotation différentielle à la surface du Soleil (même si Scheiner l'avait noté deux siècles auparavant). Ils notèrent que les taches à plus hautes latitudes ne se déplaçaient pas à la même vitesse que celles situées près de l'équateur. On établit alors que la période de rotation moyenne du Soleil était de 25 jours (terrestres) à l'équateur et 27 jours à de plus hautes latitudes.

### 1.1.2.2 Description des taches

Nous savons donc depuis longtemps que le Soleil est couvert de taches à sa surface de façon périodique dans le temps. Le "diagramme papillon" est directement tiré de ce phénomène. Il représente le pourcentage de l'aire de la surface recouverte par les taches à chaque latitude, le tout moyenné zonalement sur une rotation solaire. Lorsque nous parlons de moyenne zonale sur une rotation, il s'agit de prendre une moyenne sur toutes les longitudes de la surface recouverte par les taches solaires pendant un temps équivalent à une période de rotation solaire. Une fois ce temps écoulé, le pourcentage moyen de la surface recouverte est illustrée dans le graphique. Un exemple de ce type de diagramme est montré à la Figure 1.3 dans le premier graphique. Le second représente le rapport de la surface du Soleil couverte par de telles taches par rapport à sa surface totale.

Ces taches sont toujours générées en paires. L'une des taches contient des lignes de champ magnétique sortant du Soleil, tandis que l'autre contient les lignes de champ entrant dans l'étoile. Dans une paire, les taches se suivent dans la direction de rotation du Soleil. De plus, pour un hémisphère donné, l'ordre des taches est le même partout. Par exemple, toutes les premières taches ont un champ entrant et toutes les secondes taches ont un champ sortant dans l'hémisphère nord. Finalement, l'ordre des taches dans un hémisphère est inversé pour l'autre hémisphère. Ces propriétés représentent les *lois de polarités de Hale*, établies au début du XX<sup>e</sup> siècle. La Figure 1.4 illustre ces derniers propos. Ces taches peuvent être associées à des dipôles magnétiques localisés en surface.

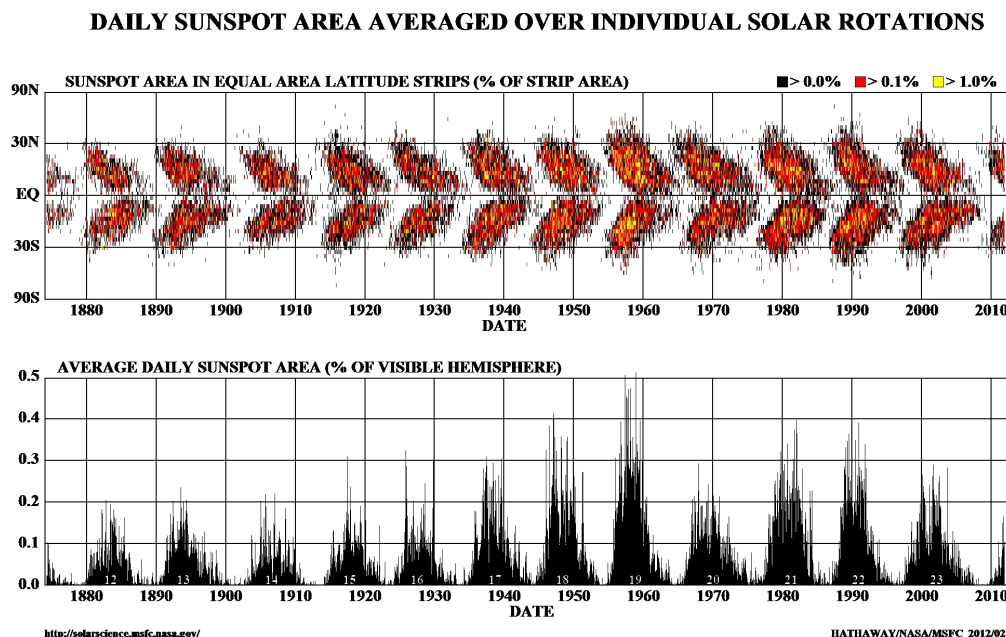


Figure 1.3 – "Diagramme papillon" solaire, suivi d'un graphique représentant le pourcentage de la surface totale couverte par les taches solaires dans le temps. Image tirée de <http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif> et téléchargée en date du mois de février 2012.

En examinant la Figure 1.3, nous constatons qu'il existe bel et bien un cycle de 11 ans où les taches commencent à apparaître aux mi-latitudes et convergent vers l'équateur pendant cette période de temps. De plus, les maxima de la surface couverte par les taches sont séparés par ce nombre d'années. Ceci implique que *le champ magnétique solaire a également un cycle de 11 ans en amplitude*. Il est indiqué en amplitude puisque ce champ magnétique change de polarité à chaque cycle (ce qui causerait un cycle véritable de 22 ans) ; autrement dit, l'ordre des taches s'inverse à chaque période de 11 ans. Ces dipôles sont donc également en phase avec le champ magnétique toroïdal, qui s'inverse dans chaque hémisphère à chaque cycle. Cependant, dans la littérature, nous appelons *cycle solaire* un demi-cycle magnétique, surtout lorsque nous faisons appel au numéro du cycle en question (chaque cycle est numéroté depuis qu'on effectue l'observation des taches solaires). La Figure 1.5 montre le nombre de taches selon les années.



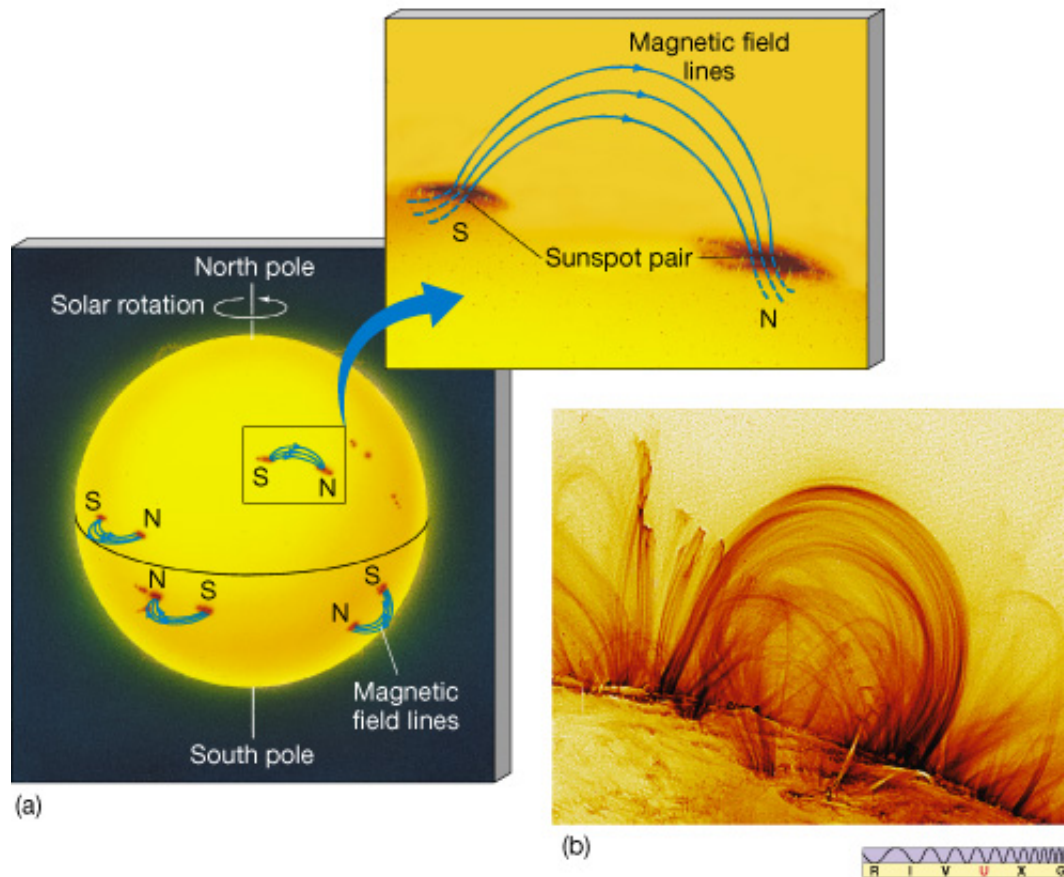


Figure 1.4 – Représentation imagée de paires de taches solaires à la surface du Soleil. On note que l'ordre des taches par rapport à la rotation du Soleil est inversé d'un hémisphère à l'autre. Image tirée de <http://irca-camera.as.arizona.edu/NatSci102/NatSci102/lectures/sun.htm> et téléchargée en date du mois d'octobre 2011. L'image a été mise sur le site web en provenance de Chaisson & McMillan de la revue Astronomy Today.

Nous y remarquons le fameux cycle solaire de 11 ans avec aisance. Également, le nombre de taches apparaissant dans un cycle n'est pas constant au fil des cycles. Il y a deux minima notables dans l'évolution des cycles solaires : le minimum de Maunder et le minimum de Dalton. Le cycle magnétique est donc prévisible temporellement, mais pas du tout en terme d'intensité, ce qui cause des maux de tête aux chercheurs qui tentent de créer un modèle réaliste du Soleil !

Pour résumer les propos tenus dans cette section, le Soleil possède un champ magné-

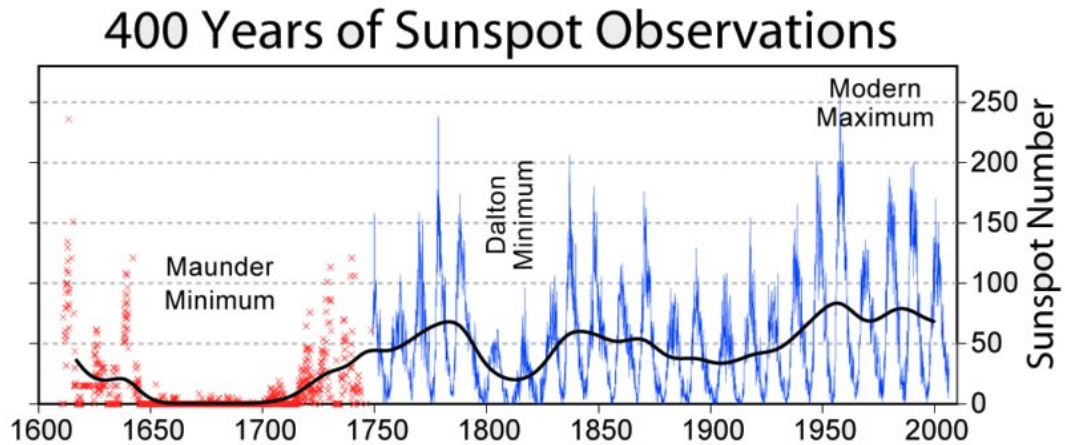


Figure 1.5 – Représentation historique du nombre de taches à la surface du Soleil au fil des ans. Image tirée de <http://www.stuffintheair.com/alternative-explanation-for-global-warming.html> et téléchargée en date du mois de juin 2011.

tique aux grandes échelles spatiales, antisymétrique par rapport à l'équateur et oscillant temporellement sur un cycle complet de 22 ans. L'intensité du champ magnétique s'observe avec le nombre de taches solaires présentes à la surface de l'étoile. Ces taches sont toujours présentes en paires : une tache a un champ magnétique entrant dans le Soleil et une autre a un champ sortant. L'ordre dans lequel se trouvent les taches indique la polarité du champ magnétique toroïdal sous-jacent. Finalement, les cycles solaires sont connus depuis fort longtemps et ces derniers sont réguliers temporellement, mais pas du tout en intensité.

## 1.2 Phénomène à l'étude : les oscillations torsionnelles

### 1.2.1 Définition

Une oscillation torsionnelle est la variation de la vitesse en direction longitudinale par rapport à la vitesse moyenne (longitudinale toujours). Ceci revient à observer une *perturbation de la vitesse longitudinale*, qui s'obtient en séparant le champ de vitesse en

deux composantes (une composante moyenne et une composante turbulente) :

$$\mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, t) + \mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) , \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{U}$  est le champ de vitesse total (toutes les contributions de vitesse du plasma),  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse moyenné en longitude (caractérisant principalement la rotation différentielle) défini par

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = \langle \mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) \rangle , \quad (1.2)$$

avec l'opérateur  $\langle \dots \rangle$  sur  $\mathbf{U}$  signifiant

$$\langle \mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) d\phi , \quad (1.3)$$

$\mathbf{u}'$  est le champ de vitesse turbulent (composante que nous voulons représenter pour observer les oscillations torsionnelles) et  $r, \theta, \phi, t$  représentent les trois composantes spatiales et la composante temporelle respectivement

Nous dénotons un cycle de 11 ans dans la représentation de  $\mathbf{u}'$ . Ce phénomène est une perturbation de la vitesse moyenne : nous ne pouvons donc pas l'observer avec les moyens conventionnels. Nous devons utiliser l'*héliosismologie*.

### 1.2.2 L'héliosismologie et les ondes acoustiques

L'héliosismologie est la branche de l'astrophysique qui étudie les mouvements "sismiques" du Soleil, ou plus précisément les ondes s'y propageant. Les ondes qui font l'objet du plus grand nombre d'études sont les ondes de pression acoustiques. Étant donné que le Soleil agit comme une immense cavité où les ondes mécaniques peuvent s'y propager, nous pouvons détecter les divers modes de pulsations acoustiques du Soleil. La façon privilégiée de les observer est d'utiliser l'effet Doppler sur les raies d'absorption photosphériques pour déceler des décalages dans ces dernières. Il faut pour cela des instruments sophistiqués, tel le Michelson Doppler Imager (ou MDI) à bord du satellite SOHO. La variation de la propagation des ondes oscillatoires à travers le Soleil nous révèle sa structure interne ainsi que les conditions physiques y régnant.

Tout d'abord, commençons par retracer l'histoire de l'observation des oscillations solaires. La découverte des oscillations dans le Soleil est assez récente, puisqu'elle a dû attendre l'arrivée des instruments adéquats au milieu du XX<sup>e</sup> siècle. Les oscillations solaires ont été détectées pour la première fois en 1960 par R. B. Leighton, R. W. Noyes et G. W. Simon à l'Observatoire du Mont Wilson [30]. Ils ont mesuré des petits déplacements dans les longueurs d'onde des raies d'absorption dans le spectre photosphérique pour dériver les vitesses par effet Doppler, à plusieurs endroits sur le disque. On observait alors des mouvements oscillatoires possédant une période d'environ cinq minutes. Ces mouvements oscillatoires avaient des vitesses maximales se situant à  $\pm 0.5$  km/s du profil des vitesses moyennes (qui varie entre 0.8 km/s aux pôles et 4.2 km/s à l'équateur). Il était accepté à cette époque que les endroits oscillatoires n'étaient que des ondulations dues au mouvement des cellules convectives lorsqu'elles arrivent près de la surface.

En 1970, R. Ulrich et, indépendamment, les chercheurs R. Stein et J. Leibacher ont réussi à expliquer ces oscillations de cinq minutes à la surface solaire [29, 48]. Ils ont proposé que ces vibrations proviennent d'ondes acoustiques stationnaires profondément enfouies dans la zone convective. Ceci donna naissance à la science de l'héliosismologie.

L'héliosismologie a permis plusieurs découvertes. Tout d'abord, cette science a confirmé que les modèles de l'intérieur solaire n'étaient pas à remettre en cause lors du fameux problème des neutrinos solaires (dont la solution suppose l'existence de plusieurs saveurs de neutrinos). L'héliosismologie a également contribué à la découverte de l'existence de la différence de vitesse de rotation entre la zone radiative et la zone convective, ce qui génère le champ magnétique principal du Soleil par effet dynamo. Aussi, cet outil a permis l'observation des oscillations torsionnelles à quelques milliers de kilomètres sous la surface solaire. D'ailleurs, les figures à venir montrant ces oscillations ont toutes été obtenues par cette technique. L'héliosismologie permet également la représentation de la face solaire la plus éloignée de la Terre à chaque instant, y compris les taches solaires. Enfin, cette science peut également nous donner indirectement de l'information sur la turbulence en calculant les fluctuations de la vitesse du son et de la densité causées par la pression turbulente et du mélange du plasma dans les couches stratifiées.

Il faut considérer les ondes acoustiques comme des modes d'harmoniques sphé-

riques. Les types d'ondes voyageant à travers le Soleil sont classées selon leur ordre radial  $n$ , leur degré d'harmonique sphérique  $\ell$  et leur ordre azimuthal  $m$ . La vitesse de propagation de ces ondes dépend du mode  $\ell$  dans lequel elles se trouvent. Cependant, deux ondes dans le même mode  $\ell$  avec des modes  $m$  différents ne pourraient pas être discernables si le Soleil ne tournait pas sur lui-même. En effet, la rotation solaire lève la dégénérescence entre les deux modes : ceci est appelé le *splitting rotationnel* des fréquences, car les ondes se propageant avec et contre la direction de rotation auront des fréquences plus élevées et plus basses respectivement.

Il y a deux types d'héliosismologie : l'héliosismologie globale et l'héliosismologie locale. Ce qui différencie ces deux types réside dans la méthode d'extraction des informations.

L'héliosismologie globale cherche à déterminer les structures et les écoulements à l'intérieur du Soleil par une inversion des fréquences des modes normaux des oscillations solaires acoustiques et de former à partir de celles-ci des combinaisons linéaires. Ces modes sont sensibles aux distributions de la vitesse du son, de la densité et de la vitesse angulaire du Soleil. Il existe deux méthodes principales d'inversion : le Regularized Least Squares (RLS) et le Optimally Localized Averaging (OLA). Cependant, ces techniques d'inversion de fréquences de modes normaux ne permettent que de récupérer l'information contenue dans la composante axisymétrique des propriétés solaires mentionnées précédemment.

L'héliosismologie locale, pour sa part, se base sur des mesures des propriétés locales des ondes solaires, comme la relation de dispersion et les temps de voyage dans des régions spécifiques du Soleil. Cette méthode nous permet de représenter sa structure tridimensionnelle et les dynamiques internes. Ces mesures sont cependant moins précises que les résultats obtenus par l'héliosismologie globale et l'interprétation des résultats doit être plus audacieuse. Pour plus d'informations sur l'héliosismologie et les techniques d'inversion, voir Howe (2009) [25].

### 1.2.3 Représentation des oscillations torsionnelles

Après ce long préambule sur la découverte des oscillations solaires et sur l'héliosismologie, nous pouvons nous pencher sur le phénomène en particulier. Les oscillations torsionnelles ont été rapportées pour la première fois par R. Howard et B. J. LaBonte en 1980 [24]. Ils ont remarqué que la vitesse longitudinale oscille dans le sens est-ouest (par rapport à la vitesse moyenne) avec une période d'environ 11 ans pour une latitude fixe. Également, ils notent qu'il existe deux régions où la rotation est plus élevée que la moyenne et deux endroits où elle est plus faible dans chaque hémisphère à chaque rotation solaire. Finalement, ils observent un déplacement des bandes plasma d'environ 2 m/s vers l'équateur pendant une période de 22 ans.

Également, les chercheurs pouvaient se demander si la vitesse équatoriale était modifiée selon le cycle magnétique. En 1976, Howard a constaté que cette vitesse était plus élevée durant un minimum d'activité solaire. Ceci fût principalement confirmé par H. Balthasar et H. Wöhl en 1980 lorsqu'ils compilèrent plus de trente ans de données sur le mouvement des groupes de taches solaires [3].

Toutes ces observations ont été obtenues par effet Doppler, ce qui ne permet d'observer ce phénomène qu'en surface. L'héliosismologie a par la suite été utilisée pour découvrir le comportement de telles oscillations sous la surface. Les Figures 1.6 et 1.7 montrent une oscillation torsionnelle qui a eu lieu durant le dernier cycle solaire complet [25]. Ces figures ont été obtenues en utilisant les deux techniques d'inversion discutées précédemment (OLA et RLS) et en prenant les données de deux sources différentes (le MDI et le Global Oscillation Network Group, ou GONG). Ce sont deux représentations du même phénomène : des diagrammes latitude-temps pour la Figure 1.6 et des diagrammes rayon-temps pour la Figure 1.7.

En analysant la Figure 1.6, nous notons immédiatement la similitude avec le diagramme papillon des taches solaires (du moins, dans sa forme). De plus, nous voyons clairement que les bandes d'une certaine vitesse sont générées aux mi-latitudes ( $\sim \pm 50^\circ$ ) et qu'elles se propagent soit vers l'équateur en environ 11 ans, soit vers les pôles en un temps considérablement plus court. Il y a une génération de deux bandes par cycle ma-

gnétique : tout d'abord celle allant plus vite que la vitesse moyenne ( $\sim 1997$ ), puis celle ayant une vitesse moindre ( $\sim 2003$ ). Ces générations de bandes allant vers les pôles et l'équateur sont de tailles semblables temporellement (les générations durent pendant environ 5 ans et demi chacune). La création de bandes voyageant vers les pôles dure 5 ans et demi et elles mettent environ 4 ans à atteindre ces derniers. Le développement de bandes voyageant vers l'équateur a lieu à la toute fin de la période de génération et elles prennent environ 11 ans à s'y propager. Notons également que l'amplitude des oscillations varie entre -3 nHz et 3 nHz. Sachant que la fréquence de rotation moyenne du Soleil se situe entre 340 nHz et 480 nHz (la grande différence entre ces fréquences étant due à la rotation différentielle), l'amplitude relative des oscillations par rapport à la rotation moyenne est comprise entre 0.6% et 0.9%, ce qui est très infime.

Maintenant, si nous nous tournons vers la Figure 1.7, nous remarquons plusieurs détails. D'abord, l'amplitude des oscillations reste du même ordre de grandeur peu importe la profondeur à laquelle nous les détectons. C'est un détail que nous pouvions également constater dans la Figure 1.6. Ces oscillations se propagent également dans toute la zone de convection, de façon simultanée et à toutes les profondeurs. Cette dernière affirmation est surtout vraie aux mi-latitudes et aux hautes latitudes ( $45^\circ$  et  $60^\circ$ ). L'amplitude de l'oscillation est la plus grande à  $60^\circ$  et cette dernière dure exactement un cycle d'activité magnétique (donc une période d'oscillation torsionnelle dure le même temps qu'une demi-période magnétique). Également, le maximum d'activité à la surface du Soleil est survenu entre les années 2000 et 2003 durant ce cycle, comme nous pouvons le constater sur la Figure 1.3. Si nous regardons la même période dans la Figure 1.7, nous remarquons que la rotation aux hautes latitudes (où se trouvent les bandes de plasma fraîchement générées) est plus élevée que la moyenne lors du maximum d'activité solaire. Autrement dit, les phases d'accélération des oscillations torsionnelles surviennent au même moment que les maxima d'activité solaire.

Les chercheurs travaillant dans le domaine de l'héliosismologie utilisent les techniques décrites dans § 1.2.2 pour expliquer le fonctionnement des oscillations torsionnelles et prédire leur amplitude durant les prochains cycles [22, 25, 26, 28]. Par exemple, le GONG recueille continuellement des données sur les modes  $p$ , ou ondes de pression,

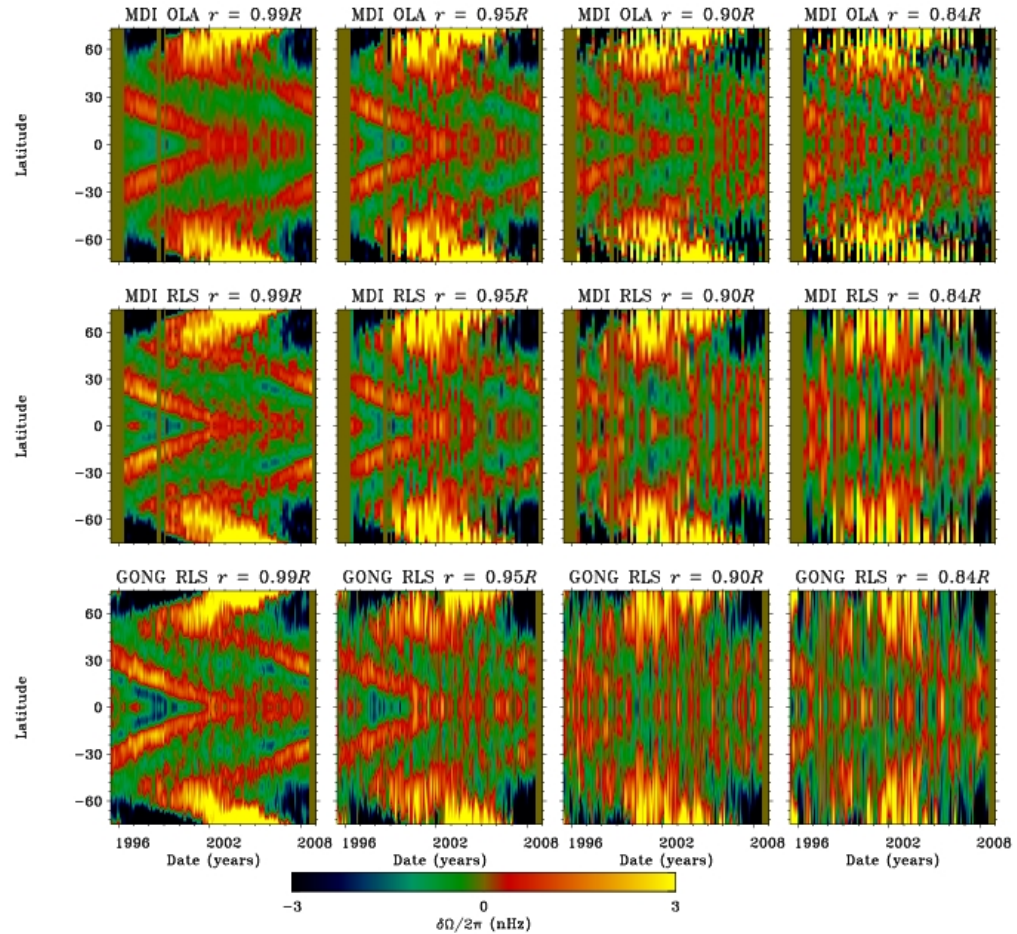


Figure 1.6 – Diagrammes latitude-temps d’une oscillation torsionnelle obtenue à l’aide de plusieurs méthodes d’inversion et de sources de données (de haut en bas, MDI OLA, MDI RLS et GONG RLS), ainsi qu’à différentes profondeurs (de gauche à droite,  $r/R = 0.99, 0.95, 0.90$  et  $0.84$ ). Les oscillations varient entre  $-3$  nHz et  $3$  nHz, du bleu au jaune. On note la génération des bandes plasma aux mi-latitudes et leur convergence soit vers l’équateur ou soit vers les pôles. Image tirée de [http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2009-1/fig\\_25.html](http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2009-1/fig_25.html) et téléchargée en date du mois d’octobre 2011.

de degrés moyennement élevés depuis 1995. Il utilise pour cela un réseau composé de six stations réparties à travers le monde, ainsi que le MDI en fonction depuis 1996, localisé à bord du satellite SOHO. Ce dernier transporte également des instruments servant à l’étude des oscillations de faibles degrés. Cette cueillette de données permet la repré-



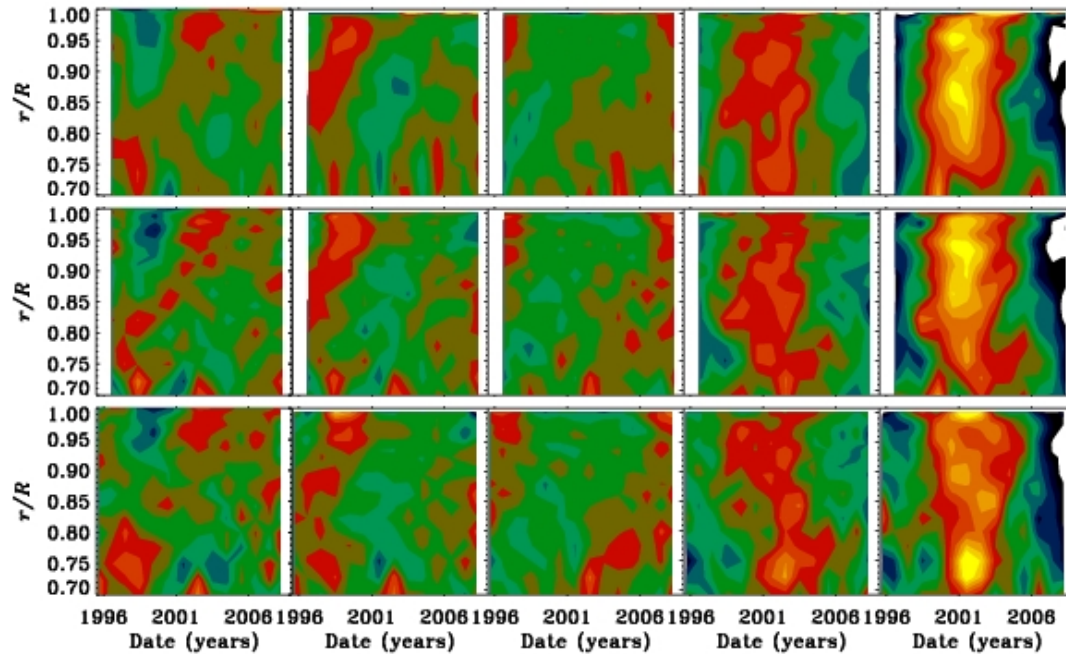


Figure 1.7 – Diagrammes rayon-temps d’une oscillation torsionnelle obtenue à l’aide de plusieurs méthodes d’inversion et de données (de haut en bas, MDI OLA, MDI RLS et GONG RLS) et à différentes latitudes (de gauche à droite,  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ). Les oscillations varient entre -3 nHz et 3 nHz, du bleu au jaune. On note la propagation des oscillations dans toute la zone de convection. Image tirée de [http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2009-1/fig\\_26.html](http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2009-1/fig_26.html) et téléchargée en date du mois d’octobre 2011.

sentation de la rotation interne du Soleil avec une quantité de détails inégalée jusqu’à ce jour [25].

Les images présentes dans cette section illustrent bien le genre de résultats qu’on peut obtenir lorsque de telles recherches sont effectuées. Cependant, peu de travaux ont été effectués pour valider les techniques utilisées pour l’élaboration de telles figures. Le plus grand pas fait dans cette direction est l’élaboration de modèles simplistes cherchant à reproduire la rotation interne du Soleil, tel que discuté plus loin. Cependant, il n’existe pas vraiment de recherches ayant pour but de redériver les équations d’inversion et de les comparer avec les modèles MHD existant. L’élaboration de tels travaux représenterait une avancée certaine dans ce domaine et, surtout, un moyen de validation fiable de la

théorie.

En ayant maintenant une meilleure idée du fonctionnement du Soleil et du phénomène à expliquer, il serait utile de décrire les différentes recherches qui ont déjà eu lieu dans le domaine.

### 1.3 À la quête de la compréhension

Selon les Figures 1.6 et 1.7, l'amplitude des oscillations torsionnelles est plus grande aux hautes latitudes et près de la surface. Ceci peut être expliqué en partie par une combinaison du moment d'inertie et de la densité. Le premier facteur explique les plus grandes amplitudes près des pôles (le bras de rotation étant plus court, la force requise pour briser la résistance du plasma à être mis en rotation est plus faible qu'à des latitudes plus basses), tandis que le second fait de même près de la surface (la densité y étant moins élevée qu'en profondeur, une force donnée induira une plus grande accélération). Ce qui reste à déterminer est la force (ou les forces) exercée(s) sur le plasma.

Divers modèles MHD et dynamos ont été créés par le passé pour tenter de reproduire le plus fidèlement possible la dynamique interne de la zone convective solaire. Le plus souvent, ces modèles utilisent les équations caractérisant les dynamos stellaires en insérant les données connues pour les composantes de la vitesse du plasma et les champs magnétiques solaires. Par la suite, ils font varier différents paramètres libres jusqu'à ce qu'ils retrouvent ce que nous observons à la surface du Soleil. En ce sens, il arrive très fréquemment qu'ils définissent un écoulement purement HD de type solaire, où l'équilibre entre le stress de Reynolds (perturbations de l'écoulement) et le transport de moment cinétique par la circulation méridienne (écoulement poloïdal, i.e. en direction latitudinale et radiale) est établi, et qu'ils y superposent une composante purement magnétique. À titre d'exemples, voici un résumé de quelques travaux réalisés dans la dernière décennie.

Dans les articles de Covas [11, 12], on tente de déterminer la valeur des différents paramètres pour un modèle (dynamo) simple basé sur l'équation d'induction magnétique de façon à ce que les résultats retournés par ce modèle soient les plus près de la réalité.

Pour cela, ils utilisent quelques approximations grossières tout en se créant une grille de paramètres libres à faire varier. Ils comparent les paramètres pour lesquels il y a la plus grande ressemblance avec les données héliosismologiques et concluent qu'il est possible de reproduire les propriétés solaires à l'aide d'un ensemble restreint d'équations que l'on fait évoluer dans le temps. Ils réussissent entre autre à reproduire le cycle magnétique solaire et à observer des oscillations torsionnelles bien définies à toutes les profondeurs. Bien évidemment, ceci n'est pas un modèle global comme celui utilisé pour générer les résultats présentés dans ce mémoire, mais simplement un modèle où plusieurs "boutons" existent pour pouvoir obtenir les résultats espérés.

Rempel [43] utilise également un modèle simplifié, mais pas pour les mêmes raisons que Covas. Il se demande comment on peut briser la contrainte de Taylor-Proudman (qui stipule que la vitesse du plasma ne peut pas varier dans la direction de l'axe de rotation du Soleil) à l'aide d'une tachocline sous-adiabatique et d'une conductivité thermique turbulente dans la zone de convection ainsi que dans la partie supérieure de la zone stable. Cette contrainte est responsable de l'erreur présente dans la majorité des simulations de l'époque où l'on observe une rotation différentielle cylindrique, ayant les isolignes de vitesse parallèles à l'axe de rotation. Nous savons grâce à l'héliosismologie qu'il n'en est rien (voir Figure 1.1), d'où la justification de sa recherche. En faisant varier certains paramètres libres, il réussit à trouver quelques profils de rotation qui ressemblent à celui du Soleil. Sa conclusion la plus marquante dans sa recherche est que le profil de rotation différentielle est défini en grande partie par le profil de la perturbation de l'entropie, cette perturbation originant dans la tachocline sous-adiabatique et se répandant dans la zone convective à cause de la conductivité thermique. Utilisant le même modèle simple, il discute également de l'origine des oscillations torsionnelles [44]. Il cherche à déterminer si les oscillations torsionnelles sont d'origine mécanique ou thermique et si elles sont une conséquence des perturbations périodiques dans la zone convective. Il trouve que le forçage mécanique génère une rotation différentielle de type Taylor-Proudman et qu'il faut donc des perturbations thermiques pour observer un bris de cette contrainte, surtout à de basses latitudes où se trouvent les branches des oscillations torsionnelles se propageant vers l'équateur. De plus, les branches se propageant vers les pôles proviennent de façon

naturelle du forçage périodique (mécanique et thermique) aux mi-latitudes.

Les recherches de S. A. Balbus [1, 2] se basent sur la résolution de quelques équations à partir des valeurs connues appartenant au Soleil, notamment l'équation des vents thermiques et celle régissant le niveau de stabilité d'un gaz barocline magnétisé (gaz où les effets convectifs, rotationnels et magnétiques ont des impacts d'amplitudes similaires sur son évolution). En outre, il tente d'ajuster un modèle simple provenant d'une solution de l'équation des vents thermiques avec ce qui est observé dans le Soleil, notamment au niveau de la rotation différentielle en surface (qu'il a tenté de reproduire avec une fonction relativement simple). Les conclusions principales de ces deux recherches sont que le profil de rotation solaire est déterminé par des effets magnétiques (et non pas par des effets hydrodynamiques) et qu'il y a une relation fonctionnelle entre l'entropie et la vitesse angulaire dans le Soleil lui permettant de déterminer avec précision ce profil à l'aide de l'équation des vents thermiques.

Le dernier exemple provient de Brun *et al.* (2004) [7]. Dans ces travaux, ils utilisent un code HD global, nommé ASH pour Anelastic Spherical Harmonic [8, 35], auquel ils ont ajouté l'équation d'induction magnétique ainsi que le signal de retour du champ magnétique à travers la force de Lorentz et le chauffage ohmique. C'est un code qui cherche à résoudre les équations anélastiques de la MHD et représente un grand pas en avant dans l'élaboration de modèles physiques du Soleil. Il y a quelques ressemblances entre ce code et celui utilisé dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire. Leur simulation ne retourne aucun champ magnétique aux grandes échelles notable, ne possède pas de tachocline, génère une rotation différentielle à peu près solaire et les champs magnétiques aux petites échelles composent la majorité de l'énergie magnétique. Il est également important de noter que leur simulation ne retourne aucune oscillation torsionnelle, ceci étant probablement dû à l'absence de champs magnétiques aux grandes échelles. L'article inclus dans ce mémoire comparera à quelques reprises mes résultats à ceux de Brun (2004) [7].

## 1.4 Le modèle MHD

Maintenant que nous avons discuté des multiples recherches qui ont eu lieu par le passé, il est temps de consacrer un peu de temps au modèle que les membres du Groupe de Recherche en Physique Solaire (GRPS) ont développé, en collaboration avec le National Center for Atmospheric Research (NCAR), à Boulder au Colorado. C’est avec la simulation engendrée par ce modèle que les résultats présentés dans l’article ont été produits.

### 1.4.1 Caractéristiques de la simulation

Pour commencer, il serait utile de décrire la structure générale du modèle et de la simulation numérique. Trois articles expliquent le fonctionnement du modèle [9, 18, 42]. Voici un résumé expliquant les détails importants à retenir sur le modèle et la simulation.

Le modèle est tiré d’un code existant, EULAG [40, 41], mais qui a été généralisé pour une simulation MHD. Ce code (EULerian-LAGrangian) est en fait un modèle atmosphérique anélastique. La simulation décrit la dynamique dans la zone convective solaire en utilisant un maillage à rayons et angles constants. Elle est calculée à une basse résolution, soit 47 mailles en rayon, 64 mailles en latitude et 128 mailles en longitude. Le domaine simulé couvre  $r/R = 0.602$  à  $r/R = 0.958$  en rayon,  $-90^\circ$  à  $90^\circ$  en latitude (l’angle nul étant situé à l’équateur) et toutes les longitudes. La simulation a donc lieu dans une coquille sphérique d’une épaisseur de  $0.356 R_\odot$ . Elle se déroule également sur un nombre de pas de temps arbitraires.

L’objectif principal de la simulation est de résoudre l’ensemble des équations MHD sous la forme anélastique, dans une coquille gravitationnellement stratifiée et tournant à une vitesse angulaire moyenne égale à celle du Soleil, soit  $\Omega_\odot = 2.69 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . Cet ensemble d’équations comprend une équation pour la quantité de mouvement, une pour l’énergie et une dernière pour l’induction électromagnétique. Il y a également deux équations de contraintes régissant le comportement des trois premières, soit l’équation de la continuité de la masse (dans l’approximation anélastique) et la non divergence du champ magnétique. Ces cinq équations s’écrivent respectivement :

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla\pi' - \mathbf{g}\frac{\Theta'}{\Theta_o} + 2\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{\mu_o\rho_o}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (1.4)$$

$$\frac{D\Theta'}{Dt} = -\mathbf{U} \cdot \nabla\Theta_e + \ell - \alpha\Theta' \quad (1.5)$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot (\rho_o\mathbf{U}) = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

Nous aurons reconnu dans les équations plus haut les dérivées lagrangiennes

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \quad (1.9)$$

Nous avons  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{B}$  représentant respectivement l'écoulement du plasma et le champ magnétique. Nous avons également  $\Theta$  la température potentielle, qui représente une mesure de l'entropie spécifique ( $s = c_p \ln \Theta$ , avec  $c_p$  la chaleur massique à pression constante), ainsi que  $\Theta'$  représentant plus spécifiquement la perturbation de cette température potentielle par rapport à l'état ambiant (qui sera décrit plus loin).  $\mathbf{g}$  a le sens habituel, soit un champ gravitationnel dirigé vers l'intérieur de l'étoile.  $\boldsymbol{\Omega}$  est la vitesse angulaire du Soleil et  $\rho$  est la densité de masse.  $\alpha$  est une fréquence constante déterminant le temps nécessaire pour se trouver dans l'état ambiant grâce au forçage thermique de la convection, celle-ci étant égale à  $2 \cdot 10^{-8} \text{s}^{-1}$  dans cette simulation. Ce paramètre pourrait être modifié au besoin, ce qui n'est pas le cas dans ce présent travail.  $\pi'$  représente une perturbation par rapport à l'état ambiant de la densité de pression normalisée dans laquelle la pression et la force centrifuge ont été incluses. Les indices "o" associent les différentes quantités à leur état de référence, tandis que celles ayant un apostrophe représentent les déviations d'un état ambiant, ce dernier étant dans un état d'équilibre thermodynamique et en accord avec des modèles solaires calibrés avec des données héliosismiques. L'état de référence ici est défini comme étant non magnétique, possédant une rotation rigide, étant isentropique et satisfaisant l'équilibre hydrostatique avec

$\mathbf{g} \propto r^{-2}$ . Pour sa part, l'état ambiant (avec un indice "e") dans la simulation est défini à travers un ensemble de polytropes, ces derniers ayant un indice polytropique variant linéairement avec le rayon du Soleil. L'état ambiant est une solution particulière du système anélastique. Dans notre cas, il représente un état solaire sur lequel des moyennes longitudinale, latitudinale et temporelle (sur une longue période d'observation) y ont été appliquées, tout en étant en équilibre thermodynamique global de façon à être cohérent avec les modèles de structure solaire calibrés avec les données héliosismiques. L'état ambiant pourrait être modifié de façon à remplir des conditions différentes par l'entremise du degré de stratification des zones stable et instable, ce qui n'est pas le cas ici. Finalement, il y a la diffusion radiative  $\ell$  qui dépend de la perturbation de température potentielle

$$\ell = \frac{\Theta_o}{\rho_o T_o} \nabla \cdot \left( \kappa_r \frac{\rho_o T_o}{\Theta_o} \nabla \Theta' \right) \quad (1.10)$$

avec  $\kappa_r$  le coefficient de diffusivité radiative et  $T_o(r)$  le profil de température associé avec l'état de référence isentropique.

Pour l'implémentation numérique de ces équations, elles sont retranscrites sous forme de lois de conservation eulériennes et projetées dans un système de coordonnées géosphériques. Remarquons que les dissipations ohmique, visqueuse et thermique sont absentes de l'ensemble d'équations. Ceci implique qu'excepté le terme de diffusion radiative apparaissant dans l'équation (1.5), tous les termes dissipatifs sont implicites au modèle et sont relégués au schéma non-oscillatoire d'advection MPDATA du modèle EULAG [47]. En effet, les termes tronqués à un ordre élevé de MPDATA génère un modèle de turbulence implicite et fournissent ainsi la dissipation du modèle [14, 31, 32]. La condition initiale à  $t = 0$  est un état statique auquel nous ajoutons des perturbations aléatoires et de très faibles amplitudes en vitesse et en champ magnétique. L'intégration se fait à des pas de temps fixes (30 minutes). Cependant, l'enregistrement des données ne se fait qu'à chaque jour solaire ( $\sim 30$  jours terrestres) pour que la taille des fichiers de sortie soit raisonnable. La durée des simulations dure quelques milliers de jours solaires (ou quelques centaines d'années terrestres).

### 1.4.2 Résultats généraux

Les prochains graphiques vont montrer différents paramètres retournés par la simulation, comme les composantes de la vitesse et celles du champ magnétique (nous ne nous attarderons pas sur la température et la pression, ces deux quantités n'étant pas particulièrement intéressantes pour les analyses présentées dans ce mémoire).

Tout d'abord, à la Figure 1.8 et à la Figure 1.9, nous avons des représentations du champ magnétique toroïdal moyen (moyenne zonale décrite par l'équation (1.3)) pour des coquilles de certains rayons et pour des cônes de certaines latitudes. Commençons par analyser la première figure. Nous voyons clairement la présence de cycles magnétiques d'une durée d'environ 35 ans pour toutes les profondeurs (quoique cela soit beaucoup plus évident à  $r/R = 0.71$ ). De plus, nous constatons qu'ils se situent aux milatitudes, plus hautes que ce que nous observons dans le Soleil. Cependant, ces cycles se déphasent un peu avec le temps entre l'hémisphère nord et l'hémisphère sud. Enfin, nous observons un patron fortement oscillatoire dans le temps près de l'équateur plus nous progressons vers la surface, comme si nous étions en présence d'un second mode oscillatoire.

Maintenant, si nous analysons la Figure 1.8, nous pouvons remarquer très clairement le développement du patron oscillatoire près de la surface s'estompant à mesure que nous progressons vers les hautes latitudes (les hautes latitudes correspondent aux latitudes près des pôles). De plus, nous voyons qu'il change de polarité entre  $15^\circ$  et  $30^\circ$ . De plus, nous observons avec aisance le champ magnétique à la base de la zone convective et dans la zone stable, sous la tachocline (qui se situe à environ  $r/R = 0.718$ ). Ce champ devient très important aux environs de  $50^\circ$  et nous notons qu'il ne change jamais de polarité avec la latitude, contrairement au champ en surface. Nous déduisons de cette figure que le champ se développe en majorité dans la zone stable et dans la base de la zone convective pour se propager par la suite vers la surface.

Ces deux dernières figures décrivent très bien quel genre de champ magnétique possède la simulation : champ cyclique dans le temps ayant une période d'environ 35 ans, changement de polarité à chacun des cycles, antisymétrique par rapport à l'équateur



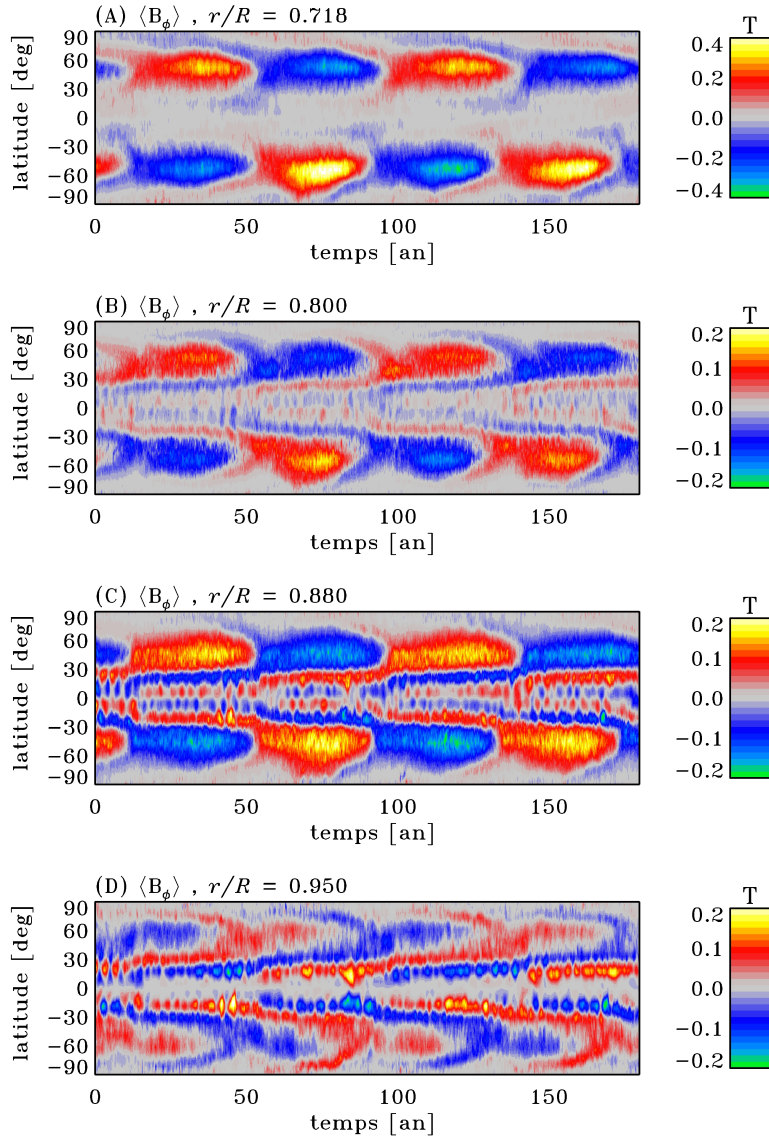


Figure 1.8 – Représentation latitude-temps du champ magnétique toroïdal sur des sphères de différents rayons. Vert-bleu signifie un champ toroïdal prograde par rapport au sens de la rotation, tandis que jaune-rouge signifie un champ rétrograde.

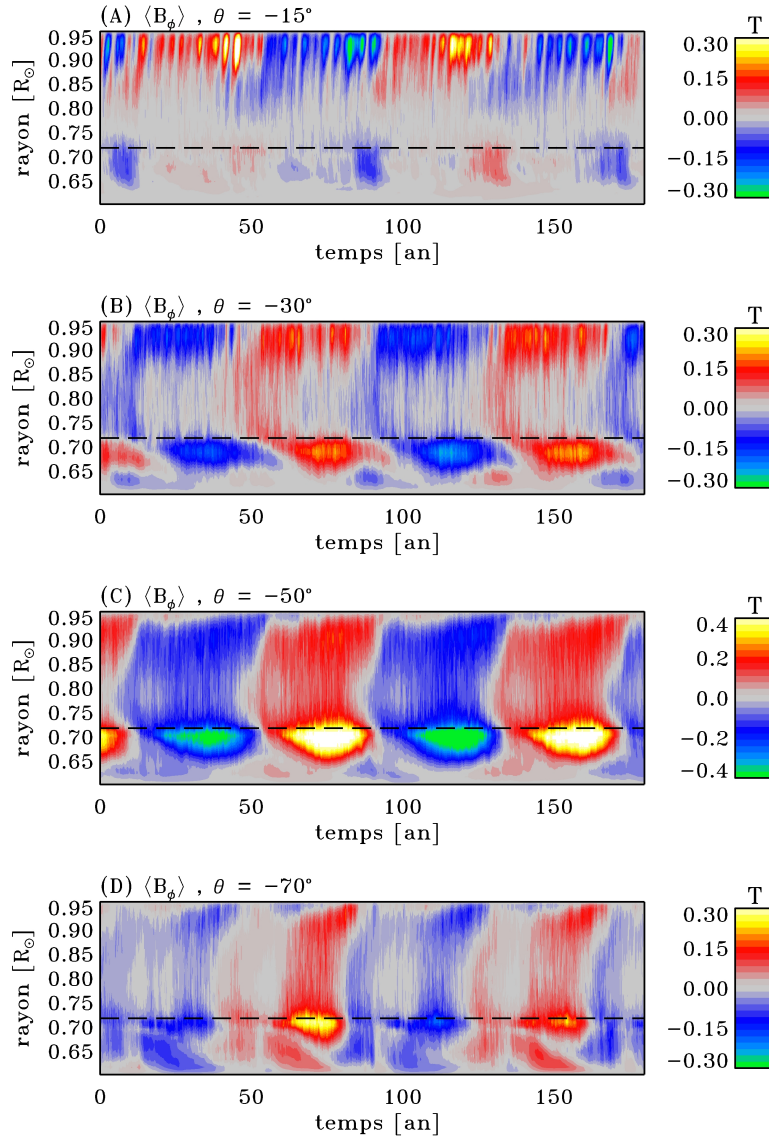


Figure 1.9 – Représentation rayon-temps du champ magnétique toroïdal sur des cônes de différentes latitudes. Vert-bleu signifie un champ toroïdal prograde par rapport au sens de la rotation, tandis que jaune-rouge signifie un champ rétrograde.

(comme un dipôle) et localisé à des latitudes un peu plus élevées que ce qui est observé dans le Soleil. C'est donc dire que le champ magnétique présent dans la simulation est similaire qualitativement avec ce que nous observons à la surface du Soleil.

Ensuite, à la Figure 1.10 et à la Figure 1.11, nous avons des schémas nous donnant le résidu de la vitesse angulaire (en longitude, bien sûr). Cette quantité est traduite par  $\mathbf{u}'$  dans l'équation (1.1), puis divisée par  $2\pi r \cos \theta$  ( $\theta$  étant l'angle polaire en coordonnées latitudinales ici, où l'angle zéro est fixé à l'équateur). Cette représentation nous permet d'annuler le signal de la rotation différentielle (qui est présente dans la simulation) et d'afficher les fameuses oscillations torsionnelles recherchées ! Dans la Figure 1.10, nous détectons clairement l'oscillation deux fois plus rapide que le cycle solaire du modèle, caractérisant les oscillations torsionnelles. Cependant, elles se développent à des latitudes beaucoup plus élevées, à l'image des champs magnétiques. Nous n'observons donc que très faiblement l'évolution vers les pôles et seulement une partie de la branche se propageant vers l'équateur. De plus, à mesure que nous nous approchons de la surface, nous observons une structure particulièrement chaotique à l'équateur probablement due à la turbulence et au fort cisaillement dans la région. Le mode d'oscillation secondaire dans le champ magnétique toroïdal observé près de la surface y est aussi sûrement pour quelque chose. Plus nous approchons de la surface, plus le signal des oscillations torsionnelles est puissant. Finalement, l'amplitude des oscillations torsionnelles présentes dans la simulation est similaire à celle des observations ( $\sim 3$  nHz).

Dans la Figure 1.11, nous remarquons aisément le développement des oscillations torsionnelles à mesure que nous progressons vers les hautes latitudes. De plus, nous voyons que ces oscillations surviennent au même moment à toutes les profondeurs (séparations temporelles en blocs). Dans un autre ordre d'idées, il y a un fait intéressant à noter aux basses latitudes. Nous pouvons clairement détecter une propagation en profondeur d'oscillations torsionnelles près de l'équateur. Elles semblent être générées en surface et elles se propagent vers la base de la zone convective, ce qui est un fait inusité. Également, l'amplitude des oscillations est encore une fois très similaire aux observations pour toutes les latitudes. En comparant cette figure avec la Figure 1.9, nous nous apercevons que la phase d'accélération survient au moment où l'intensité du champ ma-

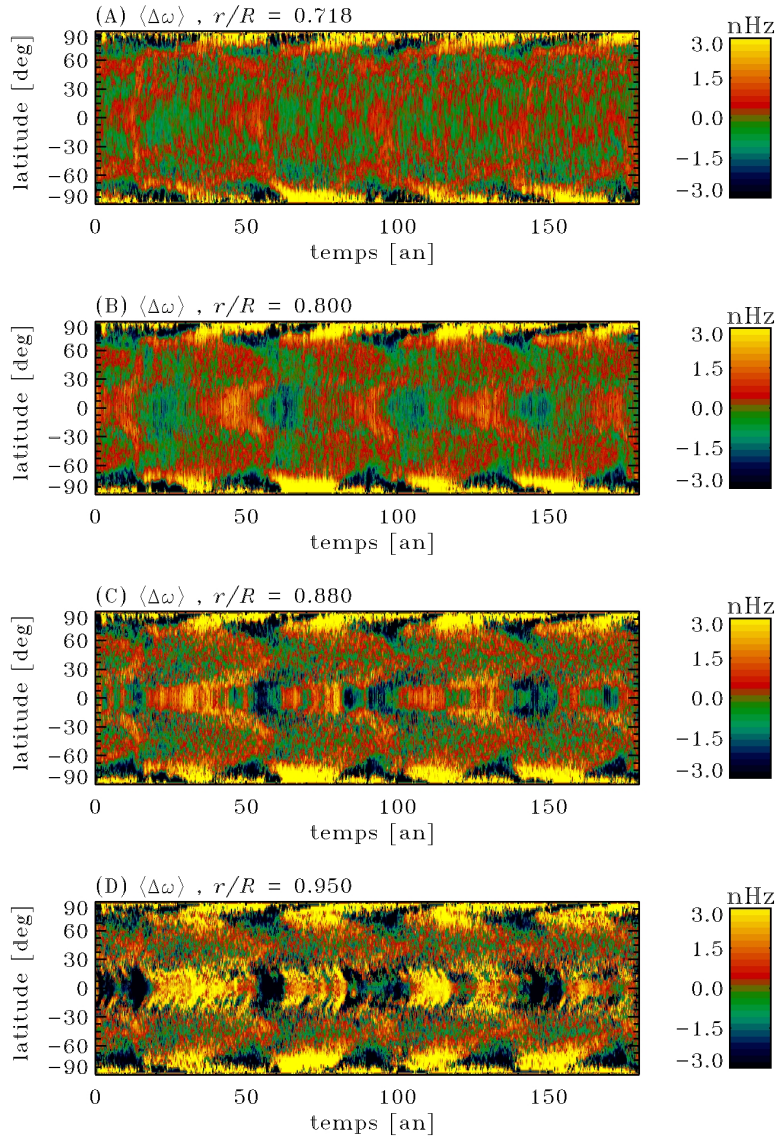


Figure 1.10 – Représentation latitude-temps du résidu de la vitesse angulaire sur des sphères de différents rayons. Bleu signifie une rotation plus lente que le profil moyen et jaune signifie une rotation plus rapide.

gnétique est la plus élevée. Enfin, nous constatons que la zone stable devient de plus en plus turbulente à mesure que nous progressons vers des latitudes plus élevées.

Si nous établissons le bilan des ressemblances et différences avec le Soleil au niveau des oscillations torsionnelles, nous constatons qu'il y a beaucoup plus de ressemblances que de différences, comme le Tableau 1.I l'indique. Beaucoup de caractéristiques sont similaires entre la simulation et les observations et cela est probablement dû à la présence des cycles magnétiques. En effet, c'est la première simulation au monde qui génère sa propre rotation différentielle et ses propres champs magnétiques cycliques aux grandes échelles spatiales à l'aide de l'ensemble complet des équations de la MHD et qui retourne une solution ayant des caractéristiques très solaires. La simulation avec laquelle cette recherche a été conduite est donc unique en son genre et permet de calculer toutes les quantités désirées (moments cinétiques, forces, puissances, etc...), ce qui en fait un outil très puissant. Il est donc plus que justifié d'utiliser cette simulation plutôt qu'une autre, étant donné ses grandes capacités et ses ressemblances qualitatives et numériques au Soleil.

## 1.5 Contribution

Étant donné qu'il y a plusieurs noms parmi les auteurs de l'article, il est bon de clarifier quelle est ma part des travaux effectués dans le cadre de cette recherche. Tout d'abord, j'ai écrit la grande majorité de la première version de l'article. Ensuite, j'ai effectué les calculs pour l'analyse vectorielle de la zone de convection, tant analyti-

| Caractéristiques similaires  | Caractéristiques différentes          |
|--|---------------------------------------|
| Amplitudes similaires ( $\sim 3$ nHz)                              | Latitude des oscillations trop élevée |
| Oscillations présentes à travers la totalité de la zone convective | Patron équatorial inexpliqué          |
| 2 oscillations par cycle magnétique                                | Faible branche équatoriale            |
| Accélération durant le maximum du cycle magnétique                 |                                       |

Tableau 1.I – Ressemblances et différences entre les observations des oscillations torsionnelles obtenues via l'héliosismologie et celles contenues dans la simulation.

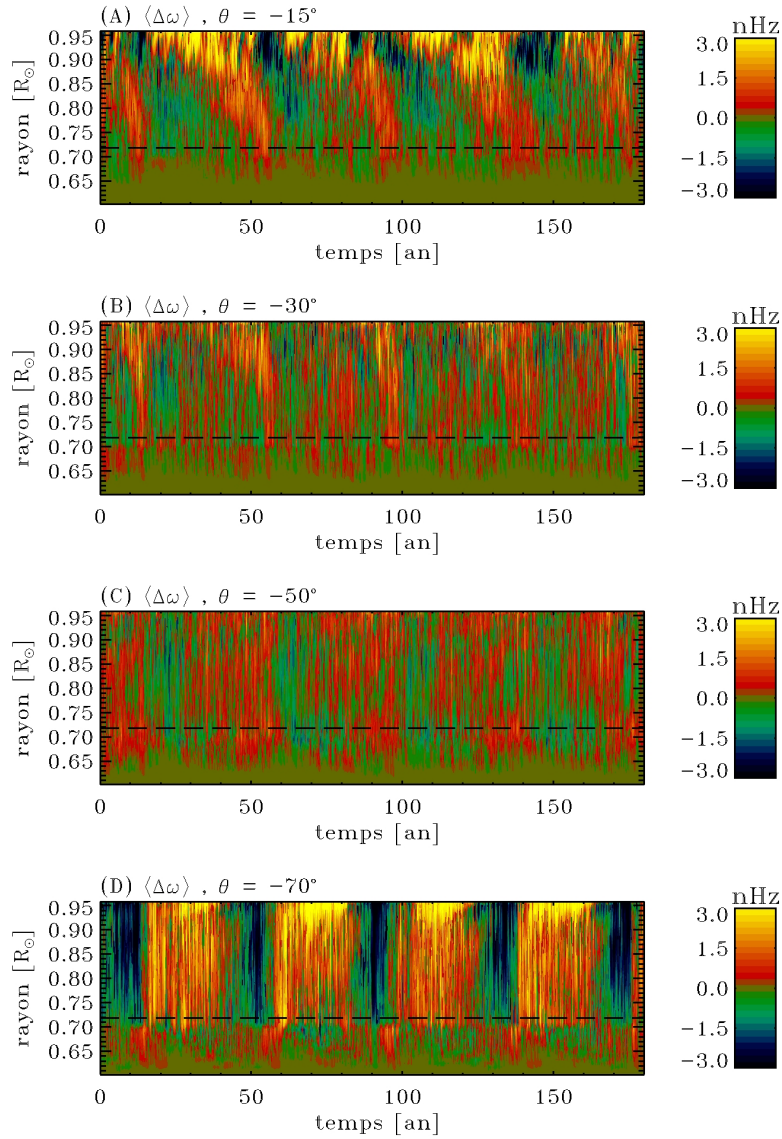


Figure 1.11 – Représentation rayon-temps du résidu de la vitesse angulaire sur des cônes de différentes latitudes. Bleu signifie une rotation plus lente que le profil moyen et jaune signifie une rotation plus rapide.

quement (équations) que numériquement. Ces calculs ont été inspirés par les travaux d'Étienne Racine qui a aussi effectué certains de ces calculs, mais d'une manière préliminaire. Également, les figures présentes dans l'article proviennent toutes de programmes que j'ai écrits. Finalement, la majorité des interprétations associées aux différentes analyses proviennent de mon directeur de recherche, Paul Charbonneau, et de moi.

Maintenant, voici ce que je n'ai pas fait et les outils dont je me suis servi pour accomplir mes analyses. Je n'ai participé d'aucune façon au développement du modèle numérique ou de la simulation, tâche réalisée par Paul Charbonneau, Mihai Ghizaru et Piotr K. Smolarkiewicz. Le programme de lecture des données retournées par la simulation ainsi que certaines des représentations graphiques des données ont été inspirés par des routines écrites par Étienne Racine. Paul Charbonneau a grandement aidé à la rédaction finale de l'article et Piotr K. Smolarkiewicz y a apporté des corrections mineures.

Il faut également ajouter que j'ai travaillé en parallèle sur un autre article dont je suis troisième auteur, en compagnie de Dário Passos et de Paul Charbonneau. L'article en question se nomme "An exploration of non-kinematic effects in flux transport dynamos" et est présentement en révision à la revue *Solar Physics*. Cet article est cité en référence. Bien que j'y aie travaillé séparément, certaines analyses et conclusions ont été utiles pour la rédaction de l'article présenté dans ce mémoire.

Ceci conclut la brève introduction portant sur le sujet du Soleil et des oscillations torsionnelles. Ce qui suit maintenant est l'article soumis, en date du 21 février 2012, à la revue *Solar Physics* constituant le coeur de ce mémoire. Il y sera question des diverses analyses menées pour tenter d'expliquer l'apparition des oscillations torsionnelles dans le modèle. La notation des références et des sections a été modifiée pour correspondre aux critères de l'Université de Montréal. La liste des références de l'article a également été intégrée à celle du mémoire.

L'article sera suivi d'une courte conclusion ainsi que des annexes comprenant certains développements mathématiques non triviaux présentés de manière plus sommaire dans l'article.

## CHAPITRE 2

### TORSIONAL OSCILLATIONS IN A GLOBAL SOLAR DYNAMO

P. Beaudoin<sup>1</sup>, P. Charbonneau<sup>1</sup>, E. Racine<sup>2</sup>, P.K. Smolarkiewicz<sup>3</sup>

Submitted to *Solar Physics*

February 21<sup>st</sup>, 2012

---

<sup>1</sup>Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-Ville, Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada

<sup>2</sup>Canadian Space Agency, St-Hubert, Québec, Canada

<sup>3</sup>National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO 80307-3000



## ABSTRACT

We characterize and analyze rotational torsional oscillations developing in a large-eddy magnetohydrodynamical simulation of solar convection [Ghizaru, Charbonneau, and Smolarkiewicz, *Astrophys. J. Lett.*, 715, 133, (2010); Racine *et al.*, *Astrophys. J.*, 735, 46 (2011); Charbonneau, and Smolarkiewicz, *J. Comput. Phys.* (2012)] producing an axisymmetric large-scale magnetic field undergoing periodic polarity reversals. Motivated by the many solar-like features exhibited by these oscillations, we carry out an analysis of the large-scale zonal dynamics, separating the contributions arising from large-scale flows and magnetic field, namely magnetic torques and Coriolis force acting on the meridional flow, and small-scale contributions associated with Reynolds and Maxwell stresses. Through an analysis of the associated angular momentum fluxes, we demonstrate that torsional oscillations are not driven primarily by the periodically-varying large-scale magnetic torque, as one might have had expected, but rather via the magnetic modulation of angular momentum transport by the large-scale meridional flow. This surprising result is confirmed by a simple energy analysis, which indicates that globally and in a time-average sense, only the Coriolis term drives a net input of energy into the mean zonal flow. We also examine the dynamical nature of the rotational coupling existing between the convection zone and the underlying stably stratified fluid layers, and find a fairly sharp transition in rotational dynamics taking place as one moves from the base of the convecting layers to the base of the thin tachocline-like shear layer forming immediately below. We conclude by discussing the implications of our analyses with regards to the mechanism of amplitude saturation in the global dynamo operating in the simulation, and speculate on the possible precursor value of torsional oscillations for the forecast of solar cycle characteristics.

**Keywords : Convection Zone, Magnetohydrodynamics, Oscillations : Solar.**

## 2.1 Introduction

Differential rotation of the solar surface was first noted in the seventeenth century by Christoph Scheiner on the basis of his extensive sunspot observations. In his 1632 *Rosa Ursina*, Scheiner states that sunspots move more slowly the farther away they are from the solar equator, and even concludes that “...From this phenomenon is drawn the strongest argument for a fluid surface of the Sun.” (*Rosa Ursina*, p. 559; as cited and translated in Mitchell, 1916, p. 440 [36]). Rediscovered in the mid-nineteenth century by R.C. Carrington and G. Spörer and soon thereafter extended to high latitudes by Doppler measurements, solar differential rotation has now been mapped deep into the Sun by helioseismology [10, 25]. From the frequency splitting of acoustic eigenmodes of varying azimuthal orders, it has now been shown that the surface latitudinal differential rotation pattern, with the solar equator rotating approximately 30% faster than the poles, persists throughout the bulk of the solar convective envelope, down to  $r/R \simeq 0.71$  (with  $R$  the Sun’s radius), where it abruptly vanishes across a thin spherical shear layer, known as the tachocline, located immediately beneath the core-envelope interface. The underlying stably stratified core appears to be rotating rigidly (or nearly so) down to  $r/R \simeq 0.3$ , at a rate equal to that of the surface mid-latitudes (see, e.g., Howe, 2009 [25], and references therein).

This internal differential rotation pattern has remained generally steady since the first helioseismic rotational inversions carried out in the late 1980’s; but not *exactly* steady. Rotational torsional oscillations were first noted in surface Doppler measurements [24], and later shown by helioseismology to extend all the way to the base of the Sun’s convective envelope. The torsional oscillation signal reaches only a few nHz in amplitude (about 0.5% of the rotational frequency), and peaks at high latitudes and in surface and subsurface layers. The oscillations develop at twice the magnetic cycle frequency and, at mid- to high latitudes (where the signal is the strongest), retain the same phase at all depths (see, e.g., Fig. 26 in Howe, 2009 [25]). More elaborate phasing patterns occur with latitudes, with two diverging “branches” of faster rotating fluid appearing at mid-latitudes around solar activity minimum : one migrating all the way down to the equator

in the span of two full activity cycles, the other migrating poleward to cause a marked spin-up of the polar region peaking at around the time of activity maximum (see Fig. 25 in Howe, 2009 [25], and accompanying discussion).

Numerous models have been suggested to explain the observed behavior of solar torsional oscillations, the vast majority relying directly or indirectly on the Lorentz force associated with the Sun's magnetic field. Howe (2009) in §9.5 [25] gives a succinct overview of these various theoretical explanations, which turn out to be difficult to confirm or refute on the basis of extant observations. Torsional oscillations having higher amplitudes near the surface and at high latitudes are certainly to be expected; subjected to a torque of a given magnitude (and of whatever origin), a ring of fluid centered on the solar rotation axis will experience greater angular acceleration if located high up in the envelope since its moment of inertia will be reduced through the lower density; and at a given depth, that same moment will also be smaller at higher latitude because of the shorter moment arm, yielding again greater angular acceleration. At any rate, both the good phase locking with the magnetic activity cycle as measured, e.g. through the sunspot number, and the close tracking of the equatorially migrating band of rotational acceleration with the activity belts, point toward a close dynamical link between torsional oscillations and the cyclically varying large-scale solar magnetic field. This has in fact remained the favored explanation ever since the discovery of torsional oscillations [46, 50]. Interest in this possible dynamical linkage has in fact recently ramped up, due primarily to the curious observation that the poleward branch of the torsional oscillations, expected to appear in the final years of cycle 23, has failed to show up as expected. Taken together with other peculiar features of the extended activity minimum having followed cycle 23, this has prompted speculations regarding the possibility that the Sun is about to enter a phase of strongly suppressed magnetic activity, perhaps akin to the Maunder Minimum [23].

From a dynamical point of view, the simplest hypothesis would be to assume that torsional oscillations are directly driven by the Lorentz force associated with the cyclic large-scale magnetic component that we associate with the magnetic activity cycle, acting on the zonal flows as a time-varying perturbation of the global hydrodynamical (HD)

balance setting the form of solar internal differential rotation. Such a balance would involve Reynolds stresses, Maxwell stresses and angular momentum advection by the meridional flow within the convection zone<sup>4</sup>. As will become apparent in what follows, the situation may well be far more complex.

In this paper, we present an analysis of the dynamics and energetics of torsional oscillations arising in a global magnetohydrodynamical (MHD) simulation of solar convection producing solar-like cycles in its dynamo-generated large-scale magnetic field. We first (§2.2) give an overview of the simulation itself, together with a description of torsional oscillations arising therein. We then recast the azimuthal component of the momentum equation in conservative form, which allows the study of azimuthal force balance in terms of fluxes of angular momentum and their temporal variations (§2.3). We also examine the energetics of torsional oscillations, and conclude (§2.4) by elaborating on some consequences of our analysis for dynamo saturation, and for the possible use of torsional oscillations as precursors of cycle amplitude fluctuations.

## 2.2 Numerical data

### 2.2.1 The global simulation

We use numerical data produced by one of the global implicit large-eddy simulations of MHD solar convection of the type presented in Ghizaru, Charbonneau, and Smolarkiewicz (2010) [18], and Racine *et al.* (2011) [42]. These remain so far unique in producing an axisymmetric large-scale magnetic field component undergoing cyclic polarity reversals on a multi-decadal timescale, in a manner similar in many ways to what is observed on the Sun. The underlying mathematical and computational frameworks are described in detail in Charbonneau and Smolarkiewicz (2012) [9], and represent a MHD generalization of the well-proven general-purpose geophysical flow simulation code EULAG (see Prusa, Smolarkiewicz, and Wyszogrodski, 2007 [41], and references therein).

---

<sup>4</sup>Some level of dynamical coupling to the underlying stably stratified radiative core may also play an important role : on the possible participation of the outer radiative core in setting the angular momentum balance within the convection zone, see the prescient analysis presented in Gilman, Morrow, and DeLuca (1989) [21].

A unique feature of both EULAG and EULAG-MHD is the possibility to delegate all dissipation to the underlying non-oscillatory forward-in-time advection scheme, which makes it possible to reach a maximally turbulent state at a given grid size, with stability persisting even when field gradients reach spatial scales commensurate with the computational cell size. As a consequence, turbulent simulations can be produced on relatively coarse grids, which allows very long time integration, as required in the study of behaviors such as magnetic cycles, which develop on timescales very much longer than the turbulent turnover time. The specific simulation segment analyzed in what follows spans 180 yr, and is executed on a relatively small mesh of size  $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 47 \times 64 \times 128$  in radius  $\times$  latitude  $\times$  longitude. The spatial domain is a thermally-forced thick spherical shell  $0.62 \leq r/R \leq 0.96$  rotating initially rigidly at the solar rate, convectively unstable in its outer two thirds ( $0.718 \leq r/R \leq 0.96$ ). The interested reader is referred to Charbonneau and Smolarkiewicz, 2012 [9] for further details.

The foregoing analysis begins with the four-dimensional datasets (3 spatial dimensions plus time) returned by the simulation. The first step is to extract the axisymmetric components of the total flow and magnetic field. As shown in Racine *et al.* (2011) [42] through modal decomposition, these axisymmetric components evolve on a timescale much longer than their non-axisymmetric counterparts, and can thus be legitimately considered as a distinct dynamical entity. We therefore express the total flow ( $\mathbf{U}$ ) and magnetic field ( $\mathbf{B}$ ) as

$$\mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, t) + \mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) , \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{b}(r, \theta, t) + \mathbf{b}'(r, \theta, \phi, t) , \quad (2.2)$$

where

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = \langle \mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) \rangle , \quad (2.3)$$

$$\mathbf{b}(r, \theta, t) = \langle \mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) \rangle , \quad (2.4)$$

are the axisymmetric large-scale components, calculated by zonal averaging :

$$\langle \mathbf{X}(r, \theta, \phi, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{X}(r, \theta, \phi, t) d\phi . \quad (2.5)$$

Note that under these definitions,  $\langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{b}' \rangle = 0$ , so that the non-axisymmetric contributions of the flow and field play the role of the “small scales” in mean-field theory.

Figure 2.1 offers four views of the large-scale (axisymmetric) toroidal magnetic field component evolving over the timespan of the simulation. The top two panels (A) and (B) show time-latitude cuts, the first extracted at the depth coinciding with the base of the convecting layers ( $r/R = 0.718$ ), and the other near its top ( $r/R = 0.94$ ). The bottom two panels show time-radius cuts extracted at (C) low and (D) mid-latitudes in the southern hemisphere. Regular polarity reversals of the large-scale magnetic field stand out prominently in these diagrams, here on a period of about 36 yr for each half cycle (equivalent to a sunspot cycle); thus the magnetic cycle period in this simulation is a little over three times longer than the  $\simeq 22$ yr observed on the Sun. The large-scale toroidal component is antisymmetric about the equatorial plane, in agreement with Hale’s polarity laws, and peaks at mid-latitudes (panel A) and immediately beneath the core-envelope interface (panel D); this latter property is in line with the need to form and store in the convectively stable layer the toroidal magnetic flux ropes that, upon buoyancy-driven destabilization and emergence, will give rise to sunspots (see Fan, 2009 [17], and references therein). The subsurface time-latitude diagram on panel (B) and time-radius diagram on panel (C) also show a hint of a secondary dynamo mode, of much shorter period and lower amplitude than the primary mode, producing what looks like an oscillation superimposed on the more slowly evolving magnetic component pervading the bulk of the domain. Interestingly, a similar combination of long- and short-period dynamo modes was also observed in the spherical wedge simulations of Käpylä *et al.* (2010) [27]. This intriguing dynamo feature will be revisited in what follows.

Other features of this simulation are discrepant with respect to the solar cycle, besides the period. Most notably, the toroidal magnetic component at the core-envelope interface, where sunspots are presumed to originate, peaks at too high latitudes com-

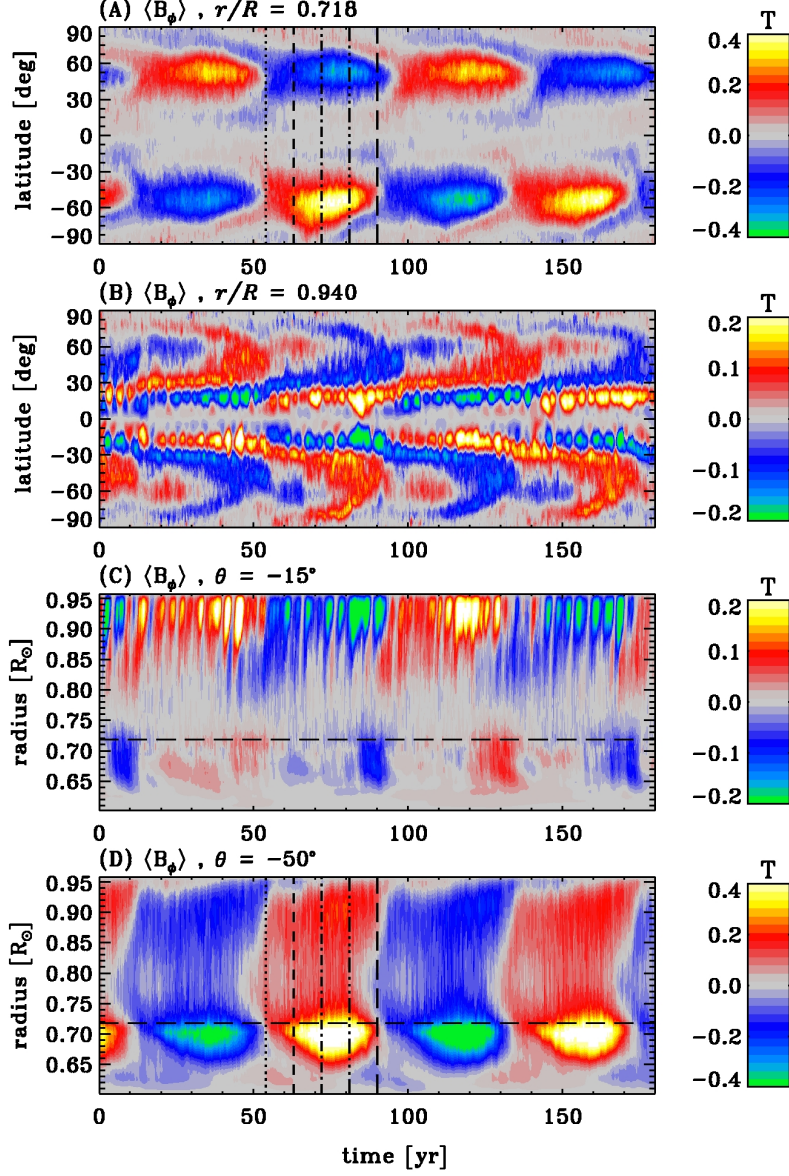


Figure 2.1: Two latitude-time representations of the zonally-averaged toroidal magnetic field at two different radii, along with two radius-time representations at two different latitudes. The dashed line in panels (C) and (D) represents the interface between the convectively stable and unstable fluid layers in the simulation's background stratification. The vertical lines in panels (A) and (D) flags five specific epochs across the second half-cycle, for subsequent reference.

pared to the sunspot butterfly diagram, and only shows a hint of equatorward migration. Moreover, analysis of the poloidal large-scale component reveals that the latter oscillates in phase with the deep-seated toroidal component, whereas in the Sun a phase lag of  $\pi/2$  is inferred. The specific simulation we are using for the foregoing analysis develops a slow phase drift between hemispheres, which eventually leads, after some 300 years, to a switch to a non-axisymmetric large-scale dynamo mode, a fascinating dynamo behavior in and of itself. Despite these departures with respect to observed solar behavior, the presence of a well-defined cyclic behavior in the large-scale magnetic field offers a unique opportunity to investigate quantitatively the magnetic backreaction on large-scale flows building up in the simulation and observed in the Sun, in particular differential rotation.

### 2.2.2 The mean differential rotation

Mechanically-speaking, solar differential rotation is driven primarily by Reynolds stresses arising through rotation-driven anisotropies in convective turbulence and angular momentum transport by meridional flows. Helioseismology has now mapped with good accuracy differential rotation throughout the bulk of the solar convection zone and upper radiative core (see, e.g., Fig. 18 in Howe, 2009 [25]). If one excludes subphotospheric layers, the primary rotational gradient in the solar convection zone is latitudinal, with the rotational frequency of equatorial regions exceeding that of polar regions by about 30%. This latitudinal gradient vanishes at the interface between the convection zone and the underlying radiative core, across a thin shear layer known as the tachocline.

With the simulations computed in a reference frame rotating at the mean solar rate ( $2.42405 \times 10^{-6} \text{ rads}^{-1}$ ), differential rotation can be directly computed from the zonally-averaged  $\phi$ -component of the flow velocity. We first compute the mean differential rotation profile by temporally averaging over the full temporal extent of the simulation, which is in a statistically equilibrated state. We have carried out this averaging exercise for the MHD simulation of Fig. 2.1, as well as a purely HD convection simulation operating under the same forcing regime and rotation rate, and computed using the same mesh size. The results are shown on Figure 2.2, expressed as angular velocity



$\omega = \langle u_\phi \rangle / (r \cos \theta)$ , with  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  the latitude. The left panels show isocontour maps, with corresponding radial cuts plotted on the right panels, on the same scales to allow quick visual comparison of the two simulations. Both are characterized by equatorial acceleration, but with isocontours too closely aligned with the rotation axis, and too concentrated towards the middle of the convection zone at low latitudes, as compared to the helioseismically-inferred solar internal differential rotation. These features are in fact typical of these types of simulations (see, e.g., Fig. 9 in Brun, Miesch, and Toomre, 2004 [7]; Fig. 1 in Browning *et al.*, 2006 [6]; Fig. 3 in Brown *et al.*, 2008 [5]), unless a latitudinal gradient in the heat flux is artificially imposed at the base of the domain (see Miesch, Brun, and Toomre, 2006 [34]). Nonetheless, the differential rotation characterizing the HD simulation (top row) shows some remarkably solar-like features, notably the magnitude of the pole-to-equator angular velocity contrast, and, in particular, a thin tachocline-like rotational shear layer located immediately beneath the core-envelope interface. The thinness of this layer ( $\simeq 0.025R$  here) is a direct reflection of the very low dissipation levels characterizing this simulation (cf. Fig. 1 in Browning *et al.*, 2006 [6]).

The resemblance to solar differential rotation degrades, however, upon moving to the MHD simulation (bottom row on Fig. 2.2). The pole-to-equator angular velocity contrast is now reduced by a factor of three as compared to the HD simulation, and the latitudinal gradient has all but vanished at mid to high latitudes. Such strong magnetic backreaction on the mean differential rotation is in fact typical of these types of global MHD convection simulations, as shown already by Gilman and Miller (1981) [20] and Gilman (1983) [19]. A residual tachocline remains, in the sense that the weak convection zone latitudinal differential rotation again vanishes across a thin shear layer beneath the core-envelope interface. Although quite weak, this remaining differential rotation remains important for the operation of the dynamo, as the analysis of a similar simulation carried out in Racine *et al.* (2011) [42] shows that it contributes approximately equally with the turbulent electromotive force to the regeneration of the large-scale toroidal magnetic field near the core-envelope interface.

Another important difference between the differential rotation profiles characterizing the HD and MHD simulations is that the former is temporally steady once the simulation

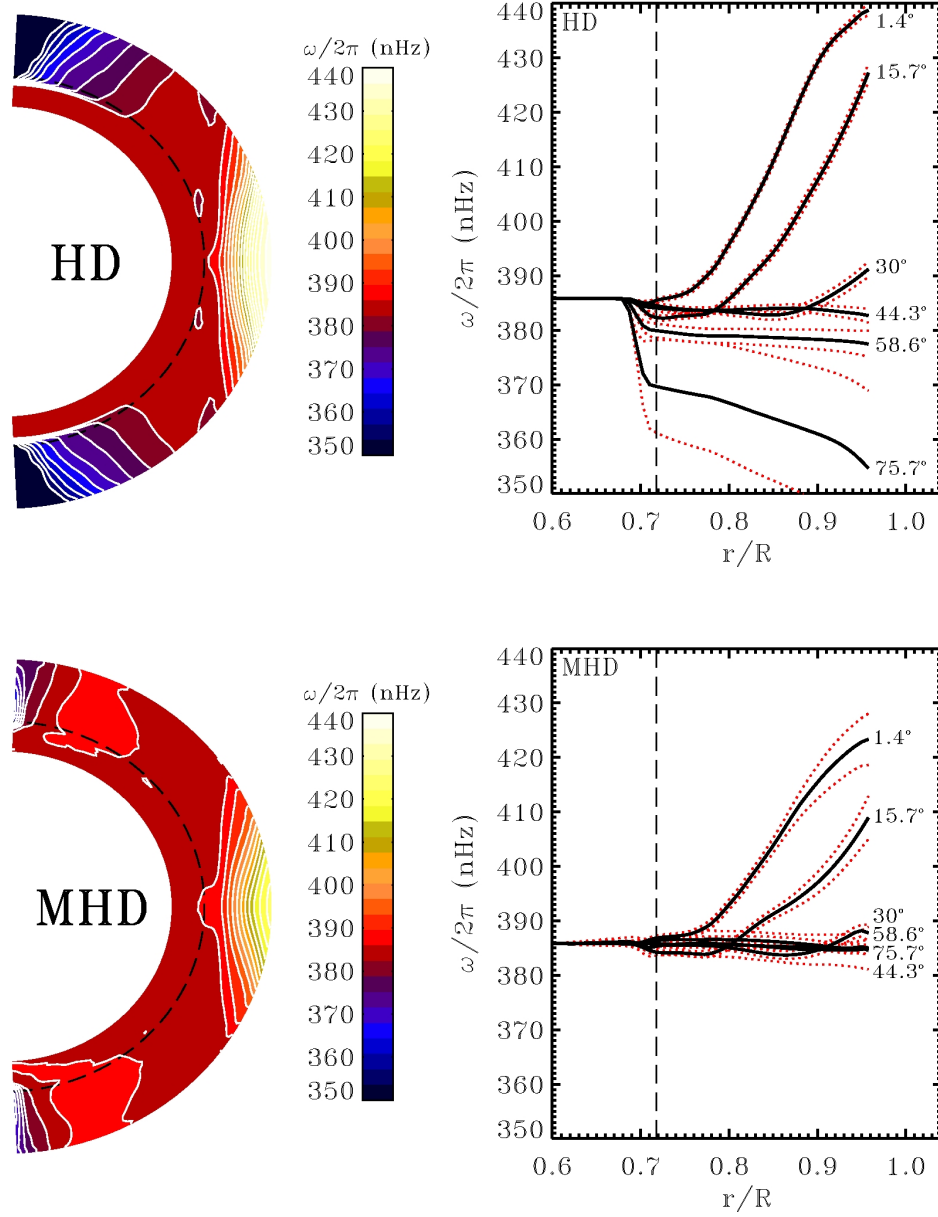


Figure 2.2: Two different representations of the angular velocity in a purely HD simulation (top) and the MHD simulation of Fig. 2.1 (bottom). The left panels show contour plots of rotational frequency at each position in the Sun, constructed from the zonally-averaged longitudinal velocity averaged in time over the duration of the simulation. The right panels show the same results in the form of constant-latitude radial cuts in the northern hemisphere, highlighting the presence of a tachocline-like shear layer immediately beneath the core-envelope interface ( $r/R = 0.718$ , dashed line). The red dotted curves indicate the  $\pm 1$  root mean square deviations about the temporal mean.

has attained a statistically stationary state. The dotted lines bracketing each radial cut on the right panels of Fig. 2.2 indicate the  $\pm 1\sigma$  deviations of the zonal averages about their temporal mean plotted on the left panels. These are quite small in the HD simulation, except near the poles. The MHD simulation, on the other hand, exhibits somewhat larger one-sigma deviations at most latitudes, but these now reflect the presence of spatiotemporally coherent cyclic variations superimposing themselves on the mean rotational profile. We now turn to the characterization of these torsional oscillations.

### 2.2.3 The torsional oscillations

Torsional oscillations are best visualized by subtracting the temporally-averaged rotational frequency profile of Fig. 2.2 from the corresponding zonally-averaged rotational frequency at each time step :

$$\langle \Delta\omega \rangle(r, \theta, t) = (2\pi r \cos \theta)^{-1} (u_\phi(r, \theta, t) - \bar{u}_\phi(r, \theta)) , \quad (2.6)$$

where the overbar denotes temporal averaging over the timespan of the simulation :

$$\bar{u}_\phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^{2\pi} U_\phi(r, \theta, \phi, t) d\phi dt , \quad (2.7)$$

amounting to the zonal and temporal average of the full azimuthal velocity  $U_\phi(r, \theta, \phi, t)$  numerical data set, with  $T$  the length of the simulation. The result of this procedure is shown on Figures 2.3 and 2.4, which display respectively time-latitude diagrams at four fixed depths, and radius-latitude diagrams at four fixed latitudes. Several features visible in these plots are noteworthy: (1) A cyclic signal is clearly present at all depths and latitudes so sampled, at twice the frequency characterizing the magnetic cycle (cf. Fig. 2.1); (2) The torsional oscillations peak in amplitude at high latitudes and in the surface and subsurface layers, reaching there  $\simeq 3$  nHz; (3) At mid- to high latitudes, the oscillations show a phase approximately independent of depth. The oscillations reach their peak prograde phase (i.e.,  $\langle \Delta\omega \rangle$  peaking at positive values) at about the peak of the magnetic cycle. All these features are remarkably solar-like, as can be inferred from comparison

with similarly-formatted diagram in Howe (2009; cf. her Fig. 26 to Fig. 2.4 herein).

At first glance, the surface spatiotemporal pattern of the torsional oscillations is not particularly solar-like (cf. Fig. 25 of Howe, 2009 [25], and Fig. 2.3D herein). Near the surface, a strong and rather complex oscillatory signal is present at low latitudes, arising from the superimposition of an oscillation associated with the large-scale magnetic cycle with a second, characterized by higher frequency and restricted to the subsurface equatorial regions. Examination of the simulation reveals that this is associated with a secondary dynamo mode feeding on the strong latitudinal shear present in the outer half of the convection zone at low latitudes (see Fig. 2.2; also Fig. 2.1B and C).

However, the dissimilarities greatly diminish if one focuses on the pattern present at latitudes higher than the equatorial magnetic “activity belts”, as defined by the time-latitude distribution of the large-scale zonal magnetic component at the core-envelope interface (Fig. 2.1A), where sunspots are presumed to originate. Figure 2.5 illustrates the idea. It is essentially a closeup of the northern hemisphere portion of Fig. 2.3C, on which have been superimposed a few isocontours of mean toroidal magnetic field strengths at the core-envelope interface (cf. Fig. 2.1A) for the first three half-cycles in the simulation. This stretching procedure maps the activity belts to low latitudes, and allows a comparison that is arguably more relevant to the patterns observed on the Sun. If one accepts this stretch at face value, then the comparison becomes actually quite good (cf., e.g., Fig. 25 in Howe, 2009 [25]). In particular, the torsional acceleration ( $\langle \Delta\omega \rangle > 0$ ) is seen to begin at high latitudes (here  $\simeq \pm 70^\circ$ ) at about the time of magnetic polarity reversal (akin to solar minimum here), and develops in two diverging branches, one propagating poleward and the second, of lower amplitude, propagating equatorward. In the Sun, this second branch requires two activity cycles to reach the equator, while here it does so in only one cycle; this may be a reflection of the fact that our activity belts are located at too high latitudes, but this remains to be demonstrated through further simulations. It is also quite remarkable that this latitudinal double-branch pattern in the torsional oscillations persists all the way to the base of the convecting layers in the simulation. Careful examination of Fig. 2.4D also reveals that an oscillatory signal even penetrates all the way through the underlying stably stratified layer to the base of the

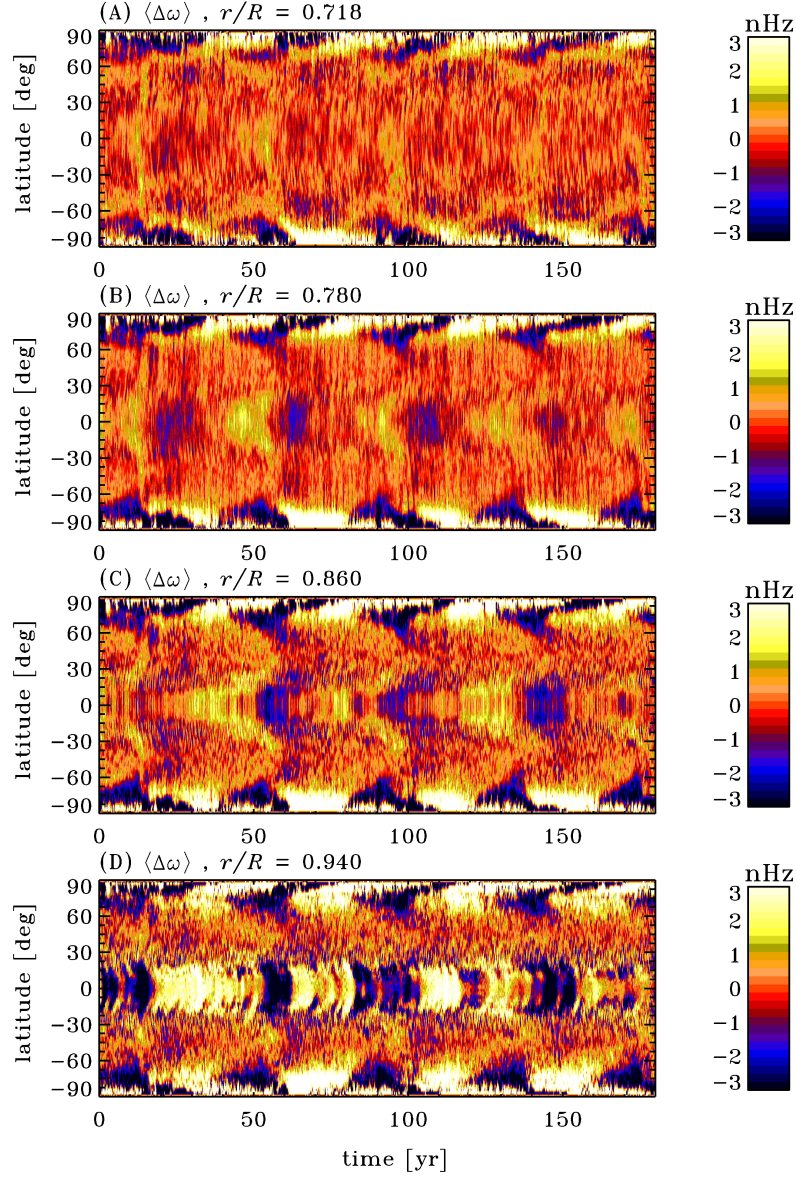


Figure 2.3: Time-latitude diagrams of the zonally-averaged perturbation in rotational frequency, at four different depths in the simulation. Positive (negative) perturbations correspond to rotational acceleration (deceleration) with respect to the mean state plotted on Fig. 2.2B

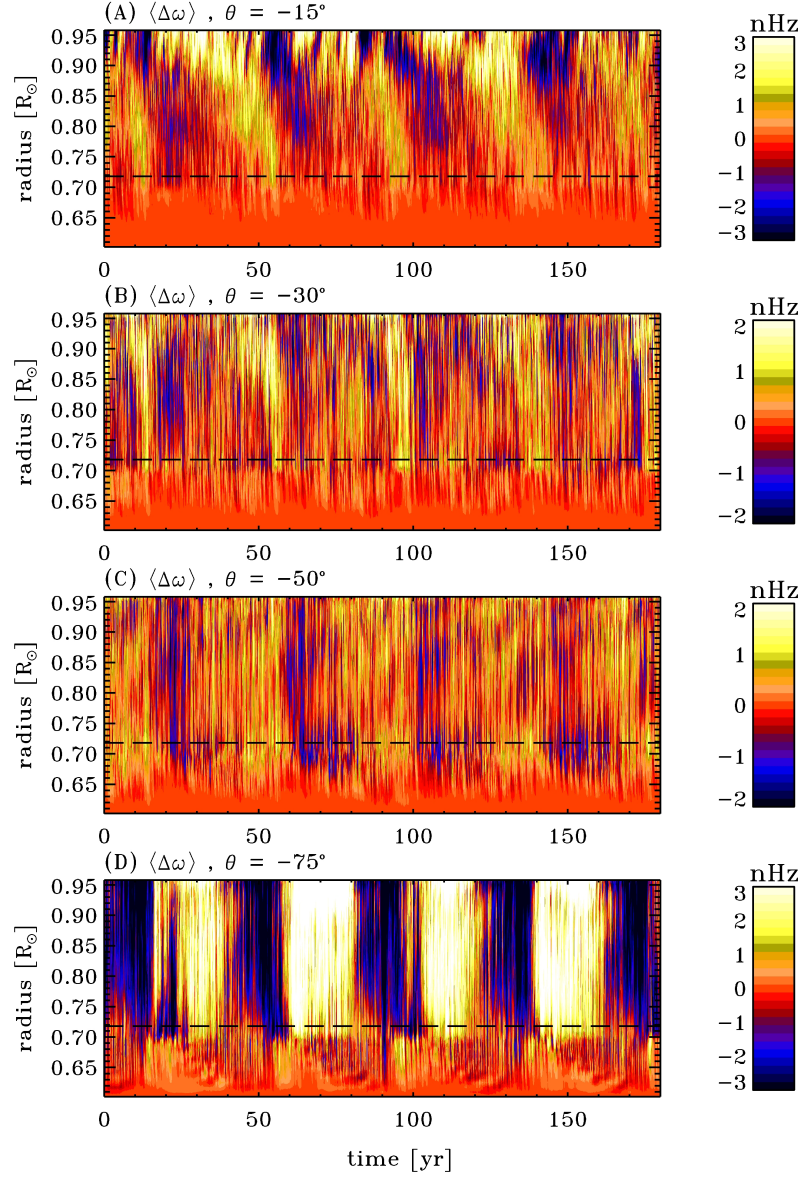


Figure 2.4: Time-radius diagrams of the zonally-averaged perturbation in rotational frequency, at four different latitudes in the simulation. The dashed line indicates the position of the core-envelope interface.

computational domain ( $r/R = 0.62$ ), although this signal may reflect the excitation of gravity waves.

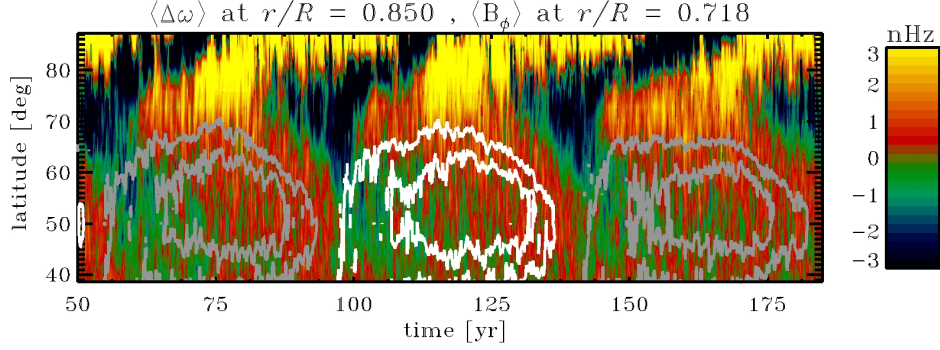


Figure 2.5: A close up on the time-latitude diagram of Fig. 2.3D, showing the zonally-averaged rotational frequency perturbation. The color scale and range are now chosen identical to those used in Fig. 25 of Howe (2009), to ease comparison. A few isocontours of zonally-averaged toroidal field at the core-envelope interface ( $r/R = 0.718$ ) have been superimposed, to indicate the relative phase of the magnetic cycle. White (grey) correspond to positive (negative) toroidal field, and the innermost contours have values  $\pm 0.2$  T.

At any rate, the results presented here demonstrate clearly that this simulation generates a global torsional oscillation pattern that is solar-like in a number of ways. Remaining discrepancies notwithstanding, we have in hand a unique “virtual laboratory” allowing a quantitative and fully dynamical investigation of the mechanism(s) driving these torsional oscillations. This is the topic to which we now turn.

## 2.3 The dynamical drivers of torsional oscillations

### 2.3.1 The zonal momentum equation

Torsional oscillations are generated because the (magneto)dynamics of the convecting layers lead to a systematic, time-dependent redistribution of angular momentum that is driven, directly or indirectly, by the magnetic cycle. In parallel to the MHD equations solved in the simulation, the foregoing analysis focuses on the azimuthal component of the Navier-Stokes equations, including the Lorentz and Coriolis forces, and written un-



der the anelastic approximation. The latter implies, in particular, that mass conservation reduces to  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$ , with  $\rho = \rho(r)$ .

The starting point of our analysis is to recast the azimuthal momentum equation in conservative form involving fluxes of angular momentum. We begin by applying the azimuthal averaging operator previously defined in eq. (2.5) :

$$\left\langle \frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial t} \right\rangle + \langle [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})]_\phi \rangle = -\frac{1}{r \cos \theta} \left\langle \frac{\partial P}{\partial \phi} \right\rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_\phi \rangle, \quad (2.8)$$

with  $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ , where  $\mathbf{V}$  is the velocity field of the plasma in the rotating frame of the Sun,  $\boldsymbol{\Omega}$  is the mean angular velocity of the Sun,  $\mathbf{R}$  is a radial vector locating a given fluid element in a spherical coordinate system with origin at the Sun's center, and once again the variable  $\theta$  denotes the latitude. Now, the azimuthal averaging operator commutes with derivatives acting on large-scale quantities, and the Lorentz force term can be rewritten as  $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2$ . Moreover, under the axisymmetry assumption, all azimuthal derivatives of averaged quantities automatically vanish, so that the above expression reduces to

$$\frac{\partial \langle \rho U_\phi \rangle}{\partial t} + \langle \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})] \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle. \quad (2.9)$$

Use of judicious vector identities also leads to

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})] \rangle = \frac{1}{r \cos \theta} \nabla \cdot (r \cos \theta \rho \langle U_\phi \mathbf{U} \rangle), \quad (2.10)$$

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \rangle = \frac{1}{r \cos \theta} \nabla \cdot (r \cos \theta \langle B_\phi \mathbf{B} \rangle). \quad (2.11)$$

Using the scale separation introduced in eq. (2.1)–(2.2), the terms  $\langle U_\phi \mathbf{U} \rangle$  and  $\langle B_\phi \mathbf{B} \rangle$  can be separated between large-scale and small-scale contributions, e.g. :

$$\langle U_\phi \mathbf{U} \rangle = \langle (u_\phi + u'_\phi)(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \rangle = u_\phi \mathbf{u} + \langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle, \quad (2.12)$$



and likewise for  $\langle B_\phi \mathbf{B} \rangle$ . Inserting eq. (2.10) and eq. (2.11) into eq. (2.9) yields

$$\frac{\partial(\rho u_\phi)}{\partial t} - \frac{1}{r \cos \theta} \nabla \cdot \left\{ r \cos \theta \left[ \frac{1}{\mu_0} (b_\phi \mathbf{b} + \langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle) - \rho (u_\phi \mathbf{u} + \langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle) \right] \right\} = 0. \quad (2.13)$$

One can separate the rigid rotation component by writing  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ , noting that  $\mathbf{u}' = \mathbf{v}'$  because there is no small-scale contribution to  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ . Since the latter term is also divergence free, we can write

$$u_\phi \mathbf{u} = (v_\phi + \Omega r \cos \theta) \mathbf{v}. \quad (2.14)$$

The end result of all this is to recast eq. (2.13) in conservative form :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial t} - \frac{1}{r \cos \theta} \nabla \cdot \left\{ r \cos \theta \left[ \frac{1}{\mu_0} (b_\phi \mathbf{b} + \langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle) - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho ((v_\phi + \Omega r \cos \theta) \mathbf{v} + \langle v'_\phi \mathbf{v}' \rangle) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

The four terms adding up under the divergence on the LHS act as volumetric force densities in the longitudinal direction, and define here the four contributors to zonal dynamics :

$$F_{\text{Reyn}} = \frac{-1}{r \cos \theta} \nabla \cdot (r \cos \theta \rho \langle v'_\phi \mathbf{v}' \rangle), \quad (2.16)$$

$$F_{\text{Circ}} = \frac{-1}{r \cos \theta} \nabla \cdot (r \cos \theta \rho (v_\phi + \Omega r \cos \theta) \mathbf{v}), \quad (2.17)$$

$$F_{\text{Maxw}} = \frac{1}{r \cos \theta} \nabla \cdot \left( \frac{r \cos \theta}{\mu_0} \langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle \right), \quad (2.18)$$

$$F_{\text{Magn}} = \frac{1}{r \cos \theta} \nabla \cdot \left( \frac{r \cos \theta}{\mu_0} b_\phi \mathbf{b} \right). \quad (2.19)$$

These are, respectively, turbulent Reynolds stresses, Coriolis force acting on the meridional flow, turbulent Maxwell stresses (small-scale Lorentz force) and the magnetic torque (Lorentz force associated with the large-scale magnetic component). Note that viscous stresses do not appear explicitly here, as our simulation is of the implicit large-eddy type, i.e., it does not include explicit dissipative terms in the momentum equation.

### 2.3.2 Angular momentum fluxes

As per eq. (2.15), the mean radial and latitudinal angular momentum fluxes are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(r, \theta, t) = & r \cos \theta \left( \frac{1}{\mu_0} (b_\phi b_r + \langle b'_\phi b'_r \rangle) - \right. \\ & \left. - \rho ((v_\phi + \Omega r \cos \theta) v_r + \langle v'_\phi v'_r \rangle) \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta(r, \theta, t) = & r \cos \theta \left( \frac{1}{\mu_0} (b_\phi b_\theta + \langle b'_\phi b'_\theta \rangle) - \right. \\ & \left. - \rho ((v_\phi + \Omega r \cos \theta) v_\theta + \langle v'_\phi v'_\theta \rangle) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Following Brun, Miesch, and Toomre (2004) [7], we first examine the global rotational dynamics by computing from the simulation output the fluxes of angular momentum integrated across spherical shells or conical wedges centered on the rotation axis :

$$I_r(r, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{L}_r(r, \theta, t) r^2 \cos \theta d\theta, \quad (2.22)$$

$$I_\theta(\theta, t) = \int_{r_{bot}}^{r_{top}} \mathcal{L}_\theta(r, \theta, t) r \cos \theta dr, \quad (2.23)$$

so that  $I_r(r, t)$  is the net angular momentum transport rate through shells of different radii, and  $I_\theta(\theta, t)$  through cones tangent to different latitudes.

In order to disentangle the various physical contributions to angular momentum transport, these integrals are computed separately for the four distinct contributions to the total angular momentum fluxes. The result of this procedure is shown in Figure 2.6, where the fluxes have also been temporally averaged over the extent of the simulation. The procedure was also carried out for the same parent HD simulation whose mean rotational frequency is plotted on Fig. 2.2 (top). In this HD simulation, the only contributors to zonal dynamics are the Reynolds stresses and Coriolis force acting on the meridional flow.

In the HD simulation, the Reynolds stresses and Coriolis force are seen to act in opposition at all latitudes and depths. This is precisely what one would expect for a sta-

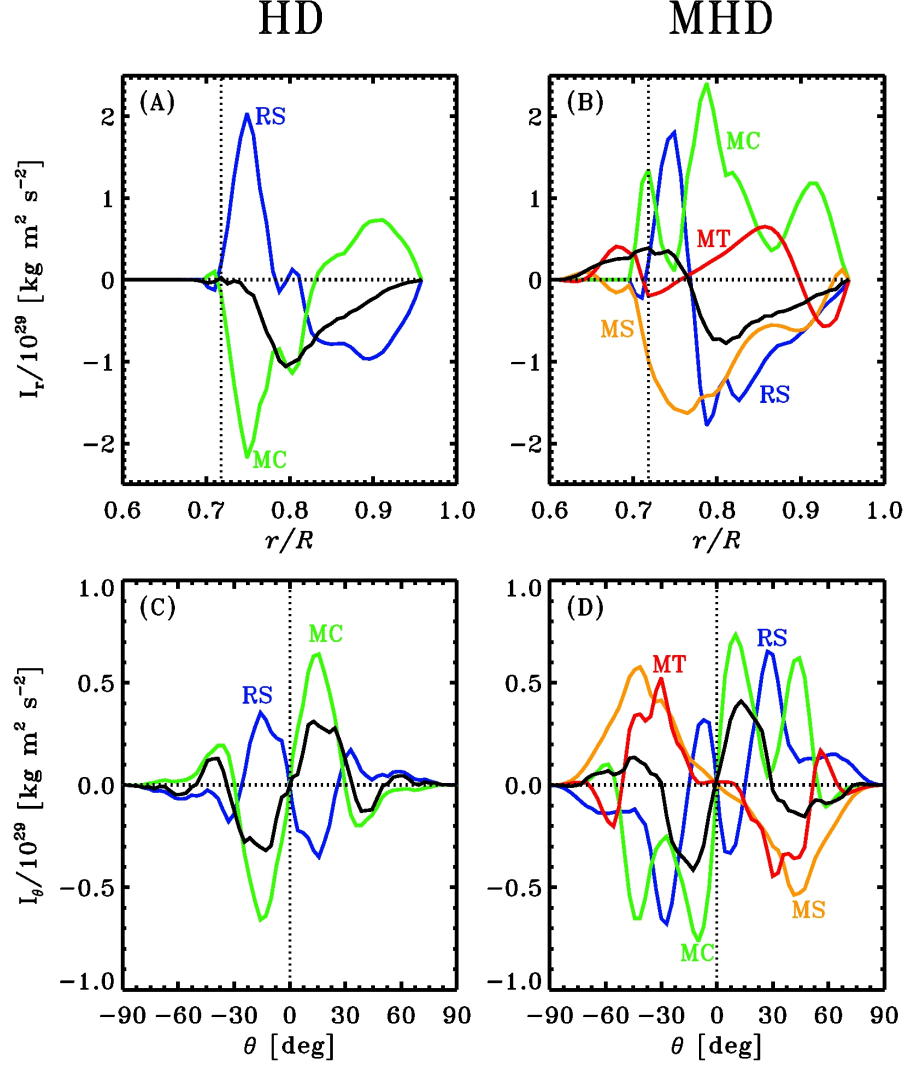


Figure 2.6: A four panels diagram showing angular momentum flux contributions. Panels (A) and (C) show these contributions in the HD simulation, while panels (B) and (D) show them in the MHD simulation. Panels (A) and (B) represent angular momentum fluxes through spherical shells of different radii, with positive values amounting to upward transport of angular momentum. Panels (C) and (D) show the fluxes through conical surfaces of different latitudes, with positive values indicating northward transport. The various curves are color-coded as follows : blue - Reynolds stresses; green - Coriolis force; orange - Maxwell stresses; red - large-scale magnetic fields; black - total of all the contributions. The vertical dotted lines in the top two panels show the location of the core-envelope interface at  $r/R = 0.718$ .

tionary rotational state to ensue. With all fluxes vanishing at domain boundaries, the fact that these two contributions do not add up to zero reflects the presence, in the simulation, of a dissipative force associated with the numerical scheme, which here contributes to the zonal dynamics, especially at low latitudes in the convection zone. This can be traced in part to the very strong rotational shear which builds up there in the HD simulation (cf. top panels Fig. 2.2)<sup>5</sup>

Turning to the MHD simulation, the most obvious feature is perhaps the fact that all four potential fluxes of angular momentum contribute more or less equally to the global rotational dynamics. Moreover, the presence of magnetic fields has greatly altered the non-magnetic fluxes of angular momentum. This is particularly the case for the radial flux of angular momentum associated with the Coriolis force (cf. green curves on panels A and B), and latitudinal fluxes by Reynolds stresses (cf. blue curves on panels C and D), which both undergo reversals in direction over a substantial portion of their spatial range when going from HD to MHD. Also noteworthy in this MHD simulation, the Maxwell stresses associated with the small-scale magnetic field contribute more or less equally to the Lorentz force associated with the large-scale, cyclic magnetic field. Finally, the presence of a magnetic field leads to a significant rotational coupling between the convection zone and underlying stably stratified core, extending deep into the latter. Such a coupling is almost entirely absent in the HD simulation. The high degree of (anti)symmetry about the equator apparent on panels (C) and (D) is a true feature of these simulations, as no averaging of hemispheres has been carried out here.

It is particularly interesting to compare Figs. 2.6B and D to the corresponding diagrams presented in Brun, Miesch, and Toomre (2004) [7], namely their Fig. 10<sup>6</sup>. Their simulation differs from ours in three important ways: (1) it covers only the convecting layers; (2) it includes substantial explicit viscosities and magnetic diffusivities throughout the simulation domain; and (3) it does not generate a large-scale magnetic compo-

---

<sup>5</sup>Such a dissipative force, of purely numerical origin, is the hallmark of ILES simulations. In the specific context of EULAG, the hydrodynamical parent of EULAG-MHD, it has been shown by Margolin, Smolarkiewicz, and Sorbjan (1999) [33] to mimic bona fide subgrid scale parametrization in the context of the planetary boundary layer.

<sup>6</sup>Note that in Brun, Miesch, and Toomre (2004) [7], their equivalent of our integrated radial fluxes are divided by  $R^2$  and they are using CGS units instead of SI units.

ment. Even though their mean differential rotation is qualitatively similar to ours (equatorial acceleration, polar deceleration, tendency towards cylindrical isocontours in equatorial regions), major differences exist in the underlying rotational dynamics. Viscous forces play a major role in the radial transport of angular momentum in their simulation, teaming with Maxwell stresses to offset the Coriolis force and Reynolds stresses throughout the whole convection zone. In our simulation, this dynamical balance (minus viscous force) materializes only in the lower third of the convecting layers, with Reynolds and Maxwell stresses acting in opposition to the Coriolis force higher up. In both simulations, the latter leads to a net upward transport of angular momentum, and Maxwell stresses drive a downward transport.

For the simulation analyzed on Fig. 10 of Brun, Miesch, and Toomre (2004) [7], viscous diffusion makes a lesser contribution to angular momentum transport in the latitudinal direction than it does in the radial direction, and not surprisingly there are now more similarities with our latitudinal fluxes, Reynolds and Maxwell stresses now opposing each other at most latitudes. The primary difference, besides the presence of a significant large-scale magnetic torque in our simulation, is found with the net latitudinal angular momentum transport by the meridional flows, which is poleward at most latitudes in our simulation, but equatorward in Brun, Miesch, and Toomre (2004) [7] simulations.

The differences between these two sets of simulations most likely do not arise exclusively from the presence of a large-scale cyclic magnetic field in our simulations, as angular momentum fluxes calculated in purely HD versions of the Brun, Miesch, and Toomre (2004) [7] simulations (see Miesch, 2000 [35] and Brun and Toomre, 2002 [8]) also differ markedly from the HD balance depicted on Figs. 2.6A and C herein. Looking at case C in Fig. 11 from Brun and Toomre (2002) [8], which is the most turbulent and closest to our parameter regime, and comparing it with our Figs. 2.6A and C, we observe very different patterns for both the Reynolds stresses and the Coriolis force acting on the meridional flow. The radial fluxes show distinct depth variations, particularly in the middle of the convection zone, but the difference is most striking in the latitudinal fluxes distributions. When looking at latitudes located in the range  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$  in

Fig. 2.6C and Fig. 11C from Brun and Toomre (2002) [8], both the Reynolds stresses and the meridional circulation contributions are of opposite sign when comparing both simulations. Additionally, there is a sign change around  $\pm 30^\circ$  in our simulation that has no counterpart in theirs. Brown *et al.* (2008) [5] present another set of HD simulations, all strongly turbulent but where they also vary the rotation rate. More specifically, in their Fig. 9 they show angular momentum fluxes for two cases: a star which has a solar-like rotation rate in panels (A) and (B), and one with a rotation rate five times greater than the Sun in (C) and (D). While panels (A) and (B) remain similar to the aforecited equivalent plots in Brun and Toomre (2002) [8], the more rapidly rotating case (panels C and D) reveal yet again a distinct dynamical balance. The major players in the radial transport of angular momentum are the Reynolds stresses and the viscous transport terms, with the Coriolis force exerted on the meridional circulation playing a lesser role. While latitudinal transport has a very complex profile, the Reynolds stresses and meridional circulation terms usually have the same sign and are counterbalanced by the viscous transport.

Another major difference lies of course with the fact that our dynamical balance is not perfectly stationary, showing instead periodic variations which drives the torsional oscillations visible on Figs. 2.3 and 2.4. It is therefore also interesting to examine the temporal evolution of those angular momentum fluxes over a magnetic half-cycle. This is carried out on Figure 2.7, which shows the evolution of each individual flux component, from the beginning of the second half-cycle on Fig. 2.1 to its end, i.e. from one minimum to the next, at a 9 yr temporal cadence, as indicated by the vertical line segments on Figs. 2.1A and D. Each panel also reproduces the temporal average of the corresponding contribution to the angular momentum transport rate over the full simulation duration (in black), taken directly from Fig. 2.6B.

The magnetic torque contribution (panel D) shows large variations about its temporal average, which is of course expected in view of the cyclic evolution characterizing the large-scale magnetic field. Far less expected a priori, however, is the fact that all other flux contributions also undergo similar variations in the bulk of the convecting layers. This is even the case for the nominally non-magnetic contributions, namely the turbulent

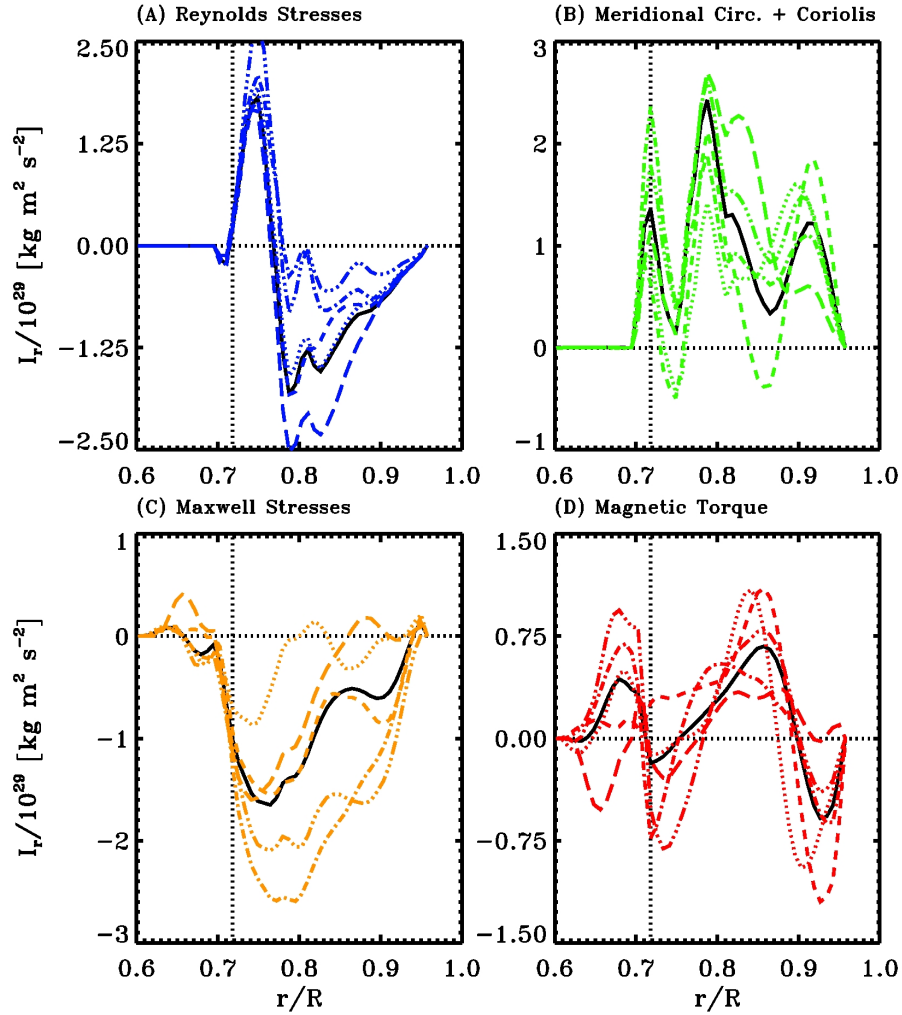


Figure 2.7: Temporal evolution of the various radial angular momentum flux contributions sampled at a 9 yr cadence between 54 and 90 yr: dotted  $t = 54$  yr; short-dashed  $t = 63$  yr; dot-dashed  $t = 72$  yr; triple-dot-dashed  $t = 81$  yr; long-dashed  $t = 90$  yr, indicated by the correspondingly coded vertical line segments on Figs. 2.1A and D. The solid line is the corresponding contribution to the angular momentum transport rate averaged over the entire simulation time, taken from Fig. 2.6B. Note the varying vertical scales on the four panels.

Reynolds stresses and Coriolis force acting on the meridional flow. The latter's temporal variations show little spatial coherence, whereas Reynolds stresses vary largely in unison at all depths. A similar situation arises with the magnetic contributions, with the magnetic torque showing a complex spatiotemporal behavior, while temporal variations in Maxwell stresses are very well-correlated spatially. Also noteworthy, flux contributions associated with the small-scale flow and magnetic field —Reynolds and Maxwell stresses— fall rapidly with depth at and below the core-envelope interface, where they show almost no temporal variability. Consequently, the time-dependence of the rotational coupling between the convection zone and underlying stably stratified fluid layers is driven by the interplay between the strongly time-varying contributions of large-scale magnetic torques and angular momentum advection by the meridional flow.

Another interesting aspect of our results relates to the rotational coupling between the convection zone, where differential rotation is generated, and the underlying stably stratified fluid layers. Figure 2.8A shows time series of the radial fluxes of angular momentum, computed via eq. (2.22) separately for each of its four contributions, as labeled. At the core-envelope interface proper ( $r/R = 0.718$ ), the net transport of angular momentum across the corresponding spherical shell is directed upward, and is driven primarily by the Coriolis force acting on the meridional flow, and resisted by the magnetic forces. Although the magnitude of the large-scale magnetic torque varies cyclically in phase with the magnetic cycle, as one would have expected, the Coriolis term does also, which results in a net upward flux of angular momentum (in black) that does not show a well-defined cyclic signal. This general pattern is maintained down to  $r/R \simeq 0.70$  in the stable layers, but with the disappearance of the HD forces further below, the magnetic terms take over completely, as shown on Figure 2.8B. The large-scale torque now drives an upward angular momentum flux, and is opposed by the Maxwell stresses. Cyclic variations on the magnetic cycle frequency can still be detected, but quasi-cyclic modulations on shorter periods are also apparent at these depths.

A similar dynamical transition as a function of depth in the stable layer is also present in the latitudinal angular momentum fluxes, as illustrated on Figs. 2.8C and D. These time series result from the calculation of the four individual contributions on the RHS of



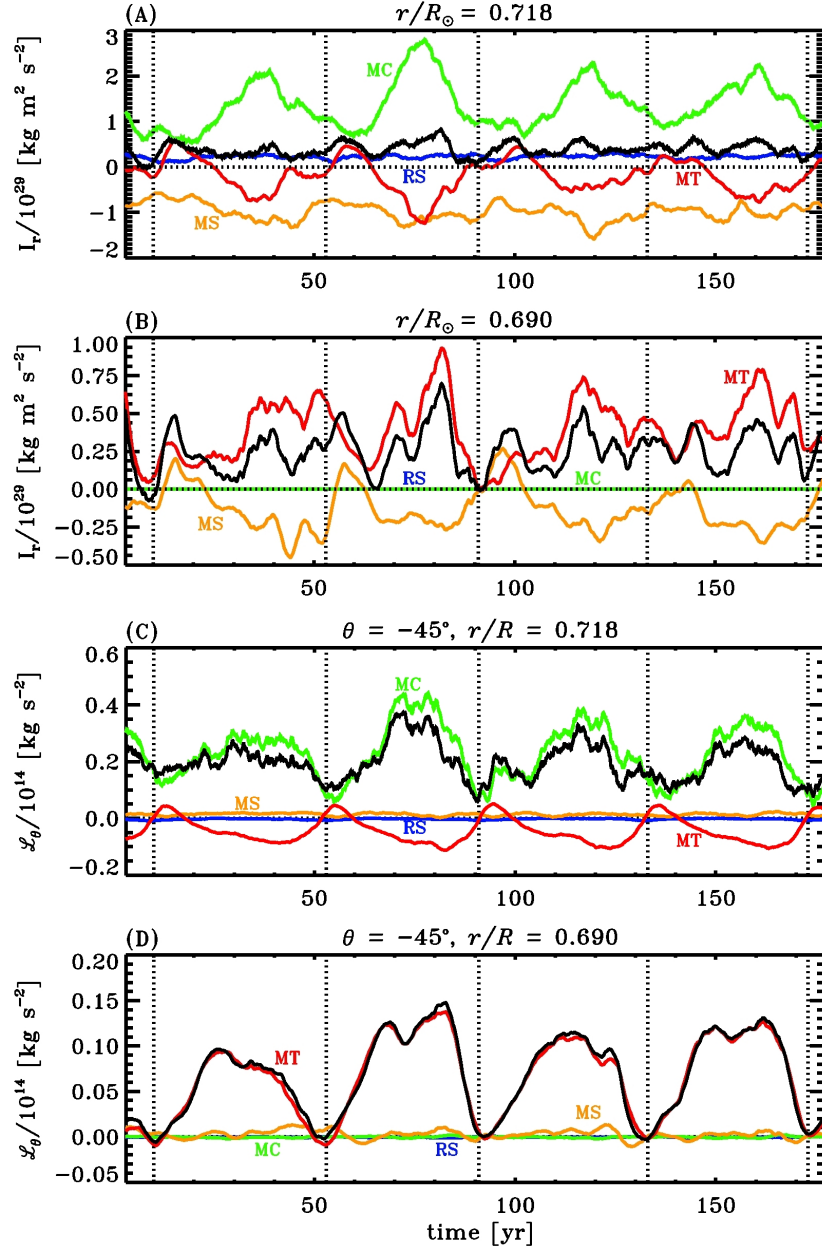


Figure 2.8: Temporal evolutions of angular momentum fluxes for each contribution, as labeled. Panels (A) and (B) show the net radial angular momentum transport rate through spherical shells at  $r/R = 0.718$  and  $r/R = 0.69$ . Panels (C) and (D) display time series of the mean latitudinal flux at these same depths, both at  $\theta = -45^\circ$ . Note the varying vertical scales on panels (A) vs (B), and (C) vs (D). The vertical dotted lines indicate epochs of polarity reversal of the large-scale internal toroidal magnetic field, as determined from Fig. 2.1, equivalent here to “solar minimum”. Here each time series has been smoothed with a boxcar average of width 4 yr.

eq. (2.21) at latitude  $-45^\circ$  and two different depths, as labeled. At the mid-latitude core-envelope interface (panel C), the latitudinal flux is directed equatorward and dominated by the meridional flow contribution, which shows a strong cyclic signal in phase with the magnetic cycle. This is associated with a strong driving of the meridional flow by the large-scale magnetic field (on this point see also Passos, Charbonneau, and Beaudoin, 2012 [38]), but with regards to the zonal dynamics, the large-scale magnetic torque here drives angular momentum poleward, as expected from the shearing of a latitudinally-oriented poloidal large-scale magnetic field by a latitudinal differential rotation characterized by equatorial acceleration. Moving inwards, already at  $r/R = 0.70$  (not shown) the magnetic torque has reversed and now drives angular momentum equatorward, and by  $r/R = 0.69$  (panel D) the contribution of the meridional flow has vanished and the large-scale magnetic torque is the sole driver of the equatorward angular momentum flux, which remains strongly modulated by the magnetic cycle. The Reynolds and Maxwell stresses are minor contributors to the latitudinal flux of angular momentum at all depths in the stable layer.

### 2.3.3 Volumetric force densities

We now turn to explicit calculations of volumetric force densities, by taking the divergence of the various contributions to the total angular momentum flux, as appearing on the RHS of eq. (2.15), at each grid point in the meridional  $[r, \theta]$  plane. In both HD and MHD simulations, temporally averaging each set of grid point values over four magnetic half-cycles produces again patterns with a high degree of symmetry with respect to the equator. Comparing HD and MHD simulations reveals the most pronounced differences at mid- to high latitudes, where even the nominally HD forces —Reynolds stresses and Coriolis force acting on the meridional flow— show large differences in their spatial distributions. This is particularly striking in the Coriolis term, which tends to accelerate (decelerate) the zonal flow in the outer (inner) half of the convecting layers of the HD simulation, and shows the opposite pattern in the MHD simulation. In the MHD simulation, Maxwell and Reynolds stresses tend to oppose each other at most locations in the meridional plane, and the two magnetic contributions are the sole significant contributors

within the underlying stable fluid layer, consistent with Fig. 2.6.

Figure 2.9A offers a more focused look at the torsional oscillations dynamics at high latitudes, in the form of time series of the various azimuthal force components extracted at a specific grid point located at depth  $r/R = 0.925$  and  $-70^\circ$  latitude (Southern hemisphere). At first glance, at this location the Reynolds and Maxwell stresses contribute very little to the zonal dynamics, which is primarily driven by the large-scale Lorentz force (red) and Coriolis force (green). However, these two contributions are of similar magnitudes but strongly anticorrelated, and so nearly cancel each other. The resulting total force (black) is then of much smaller magnitude than either of these two contributions, and comparable again to the lower amplitude Maxwell stresses (orange).

Figure 2.9B replicates the temporal evolution of this net force, together with the evolution of the mean toroidal magnetic component (red) and zonal flow velocity (blue). The red dashed line is a time series of the large-scale toroidal field extracted at mid-latitudes at the core-envelope interface, and represents here a proxy of the overall cycle phase. Despite strong temporal fluctuations, the plot reveals that the net zonal force is generally in the prograde direction throughout the peak phases of the magnetic cycle, and tends to fluctuate about zero around epochs of polarity reversals in the large-scale magnetic field. This is consistent with the peak prograde amplitude of torsional oscillations occurring around times of cycle maximum (cf. Figs. 2.1 and 2.4). The fact that the local variation of the toroidal field lags behind the zonal flow variations suggests that the latter's shearing action contributes at least in part to its induction. It is quite remarkable that the force component in (A) which shows the best correlation with the zonal flow variations is the Reynolds stresses (blue), which have the lowest individual amplitude of all four force components.

Figure 2.10 offers yet a different look at the torsional oscillations dynamics. The curves are trajectories in a two-dimensional phase space defined in terms of the zonally-averaged zonal flow deviation about its temporal mean over the simulation timespan (horizontal), versus the zonally-averaged latitudinal flow deviation about its own temporal mean (vertical). Four such trajectories are shown, for meridional plane grid points located at the subsurface high latitudes  $(r/R, \theta) = (0.95, \pm 70^\circ)$  in panels (A) and (B),

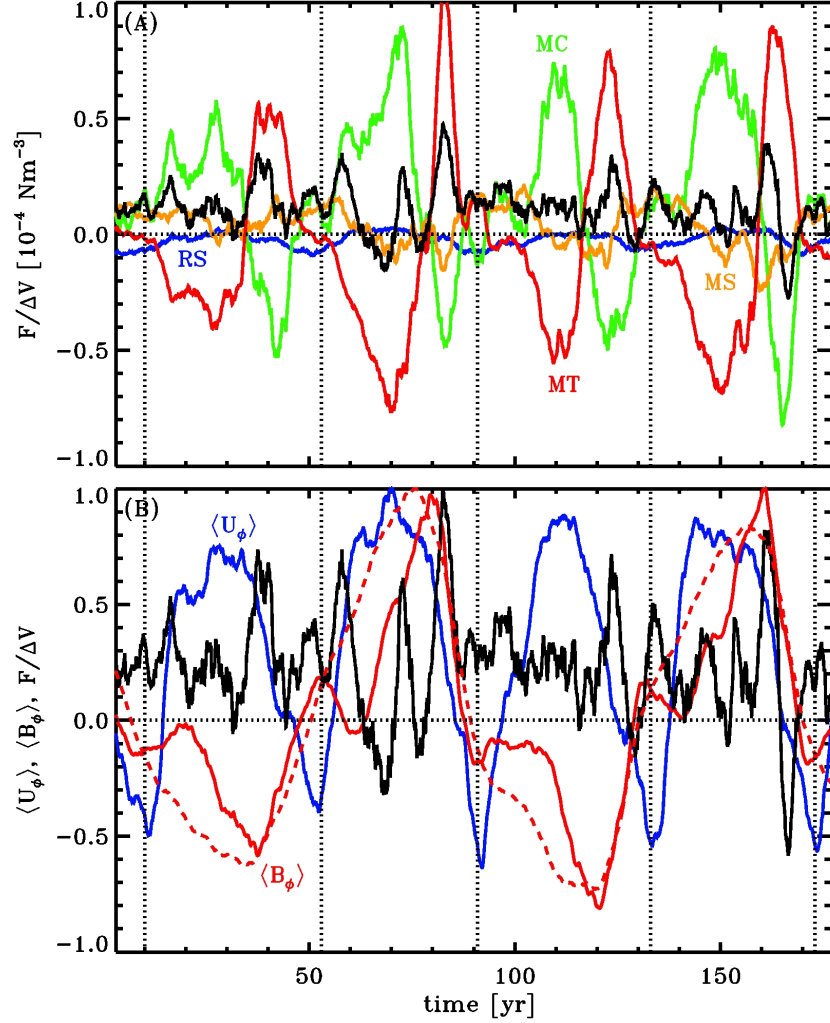


Figure 2.9: Two representations of temporal evolution of the volumetric force density applied on the plasma at  $r/R = 0.925$  at a latitude of  $-70^\circ$ . Panel (A) depicts individual force components : blue - Reynolds stresses; green - meridional circulation with Coriolis effect; orange - Maxwell stresses; red - large-scale magnetic fields; black - sum of all four contributions. The vertical dotted line indicate times of magnetic cycle minimum, based on the zonally-averaged toroidal field at the core-envelope interface (cf. Fig. 2.1). Panel (B) shows time series of the total force (black), the zonal velocity (blue) and toroidal magnetic field (red). The red solid line is the toroidal magnetic field taken at  $r/R = 0.925, \theta = -70^\circ$ , while the red dashed line is that same quantity extracted at  $r/R = 0.718, \theta = -60^\circ$ . Here each time series has been normalized to its peak values for comparison purposes, and smoothed with a boxcar average of width 4 yr. The vertical dotted lines delineate subsequent magnetic half-cycles.

and mid-high-latitude core-envelope interface  $(r/R, \theta) = (0.718, \pm 60^\circ)$  in panels (C) and (D).

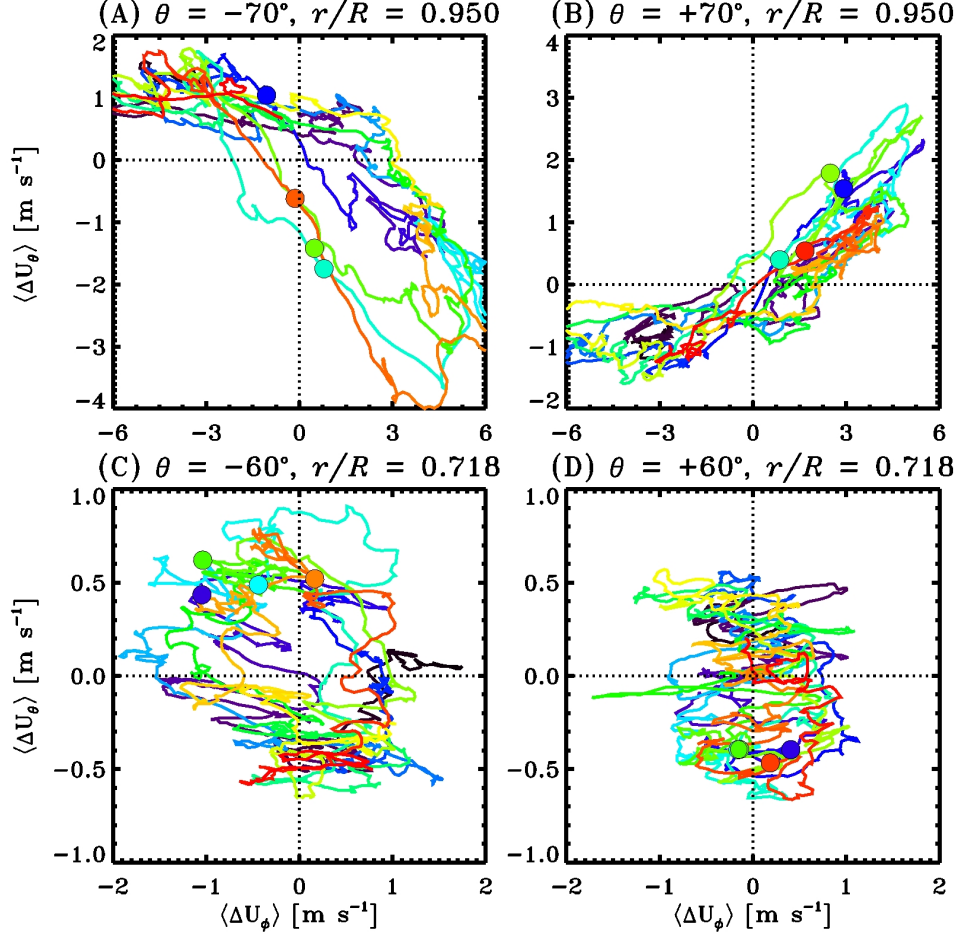


Figure 2.10: Phase diagrams of the perturbation in latitudinal velocity plotted vs. the perturbation in longitudinal velocity for two depths and four latitudes, as labeled above each panel. The color sequence indicates the temporal evolution : black - violet - blue - green - yellow - orange - red. The colored solid dots indicate the epochs of magnetic cycles maxima.

In the high latitude subsurface layers (panels A and B), both flow perturbations are strongly correlated in time, with the poleward latitudinal flow varying in phase with the prograde rotational acceleration. That local rotational acceleration (deceleration) should

correlate in this manner to the variation of the latitudinal flow component and is consistent with conservation of angular momentum in an axisymmetric fluid ring symmetrically contracting (stretching) as it gets displaced towards (away) from the rotation axis by the latitudinal flow. This suggests that, in this high latitude location, the zonal dynamics are “enslaved” to the meridional flow dynamics. Interestingly, a similar situation was observed by Gilman (1983) [19] when analyzing the torsional oscillations generated by his pioneering global MHD simulation of solar dynamo action, even though magnetic driving of the meridional flow perturbation could not be firmly established. This is all the more remarkable given that in the Gilman (1983) [19] simulations, angular momentum transport by the meridional flow played little significant role in sustaining the average differential rotation profile.

Enslavement of zonal dynamics to meridional flow variations does not hold everywhere, however, as evidenced by panels (C) and (D) of Fig. 2.10. These diagrams are now constructed from time series of zonal and latitudinal flow variations extracted at  $\pm 60^\circ$  latitude at the core-envelope interface. The corresponding phase diagrams of zonal and latitudinal flow residuals are now markedly different from their high latitude subsurface counterparts on panels (A) and (B), with the two flow residuals now varying cyclically but out of phase with one another, with a phase lag  $\sim \pi/2$ . This indicates that the zonal dynamics cannot be reduced to angular momentum conservation in a contracting (expanding) fluid ring, and results from a more complex interplay of time-varying direct and indirect magnetically-mediated forcing (see also the companion analysis presented in Passos, Charbonneau, and Beaudoin, 2012 [38]).

### 2.3.4 Energetics of the torsional oscillations

The conclusion drawn above can be further substantiated through an analysis of the flux of energy to and from the various energy reservoirs defined by the flow and magnetic field. The evolution equation for the kinetic energy density of the flow,  $\varepsilon_F = \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2$ , takes here the form :

$$\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial t} = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_F + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_B + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_g, \quad (2.24)$$

where the volumetric force densities associated with the flow ( $\mathbf{F}_F$ ), magnetic field ( $\mathbf{F}_B$ ), and buoyancy ( $\mathbf{F}_g$ ) have been schematically grouped on the RHS. With  $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ , both terms on the RHS correspond to the volumetric work done by the various forces on or against the flow  $\mathbf{u}$ . In what follows, we are interested in the energy flow in association with the zonal dynamics, so we will set  $\mathbf{u} \equiv u_\phi$ ,  $\mathbf{F}_g = 0$ ,  $\mathbf{F}_F \equiv F_{\text{Reyn}} + F_{\text{Circ}}$ , and  $\mathbf{F}_B \equiv F_{\text{Maxw}} + F_{\text{Magn}}$ , as defined by Eqs. (2.16)–(2.21). Table 2.I lists the total powers associated with these zonal volumetric force components (left column), averaged over the full 180 yr time span of the simulation segment and integrated spatially over the southern polar caps (middle column), and over the full domain (right column).

Over the full simulation domain, Reynolds stresses and the Coriolis force inject energy into the zonal flow, each contributing more or less equally, and are resisted by both magnetic contributions, each again contributing approximately equally to the draining of zonal kinetic energy. Moreover, all four of these power contributions turn out to be fairly steady in time. This state of affairs reflects primarily the sustenance of the mean differential rotation (Fig. 2.2).

A different picture emerges, however, if one focuses on high latitude regions, where torsional oscillations have their highest amplitudes (see Fig. 2.4). Figure 2.11 shows time series of each power density contribution from Eq. (2.24) integrated over a conical volume going from the south pole to latitude  $-60^\circ$ . Energy injection into the torsional oscillations is now dominated by the Coriolis force exerted on the meridional circulation, with peak energy transfer rates usually occurring at the peak phase of each magnetic half-cycle. Reynolds stresses still contribute significantly, but only around the times of magnetic polarity reversals. The most important agent systematically extracting energy from the zonal flow is now the large-scale magnetic torque, doing so in a very well defined cyclic fashion. This reflects the action of the azimuthal Lorentz force associated with the shearing, by the torsional oscillations, of the strong polar magnetic fields generated in this simulation.

The rotational energy extracted by the large-scale magnetic torque represents an energy input into the large-scale magnetic field. In the absence of explicit Ohmic disipa-

| Powers (W)                         | $-90^\circ < \theta < -60^\circ$ | $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ |
|------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| $2 \int u_\phi F_{\text{Reyn}} dV$ | $+2.44 \times 10^{20}$           | $+6.45 \times 10^{22}$          |
| $2 \int u_\phi F_{\text{Circ}} dV$ | $+8.75 \times 10^{20}$           | $+5.99 \times 10^{22}$          |
| $\int u_\phi F_{\text{Maxw}} dV$   | $-5.65 \times 10^{18}$           | $-1.19 \times 10^{22}$          |
| $\int u_\phi F_{\text{Magn}} dV$   | $-4.96 \times 10^{20}$           | $-8.68 \times 10^{21}$          |

Table 2.I: Mean powers obtained upon averaging in time the terms in Eq. (2.24) for two spatial integration ranges. A positive value implies energy input into the zonal flow.

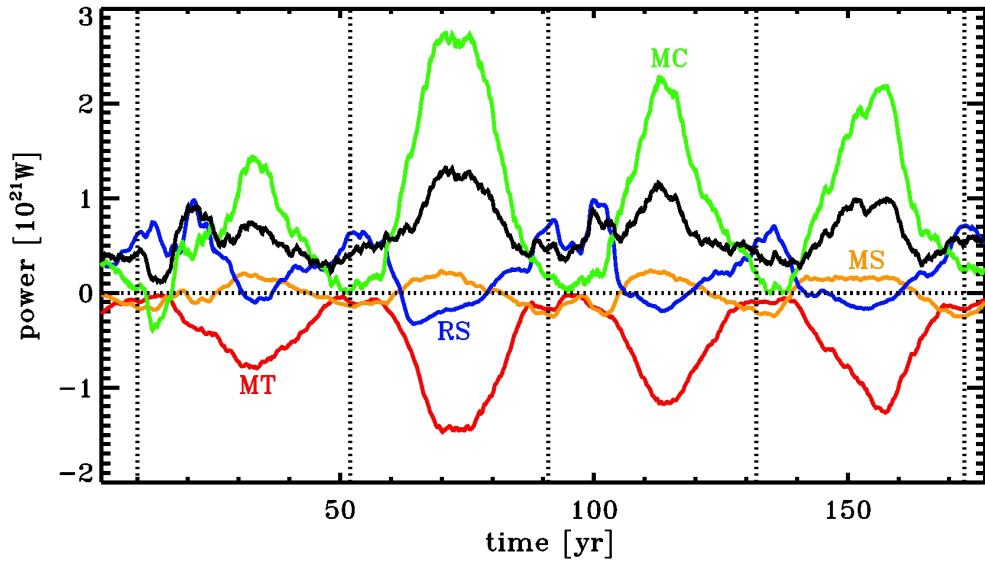


Figure 2.11: Temporal evolution of the power of various force contributions at the south pole of the Sun, integrated for  $-90^\circ < \theta < -60^\circ$ . We represented the HD contributions multiplied by 2 to be consistent with Eq. (2.24). Color coding as before : blue - Reynolds stresses; green - Coriolis force affecting the meridional flow; orange - Maxwell stresses; red - large-scale magnetic fields; black - total. The vertical dotted lines delineate subsequent magnetic half-cycles. All time series have been smoothed with a boxcar filter of width 5 yr

tion, magnetic energy evolves according to:

$$\frac{\partial \epsilon_B}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_B, \quad (2.25)$$

where  $\mathbf{S}$  is the Poynting electromagnetic energy flux, and the second term on the RHS



is the direct counterpart of the same term appearing on the RHS of eq. (2.24), except of course for the sign. Torsional oscillations, far from being directly driven by large-scale magnetic torques, instead divert energy back into the large-scale magnetic field through the agency of magnetic torques. The inescapable conclusion is that direct magnetic driving of torsional does not represent a saturation mechanism for the global dynamo operating in this simulation. However, the magnetic cycle does drive large fluctuations in the meridional flow, and the Coriolis force acting on this cyclically forced flow turns out to be the main driver of torsional oscillations. Indeed, the energy analysis presented in §5 of Passos et al. (2012) indicates that magnetic driving of the latitudinal flow is the primary sink of magnetic energy in this simulation. Schematically, the energy flow is thus of the form :

Magnetic energy  $\rightarrow$  meridional flow  $\rightarrow$  torsional oscillations  $\rightarrow$  (numerical) dissipation.

The most important take-home message of the above analyses is the following : torsional oscillations are not driven by a cyclic, magnetically-mediated perturbation superimposing itself on an otherwise steady hydrodynamical zonal balance. Instead, all angular momentum flux contributions, including those of a purely HD nature, are strongly modulated by the magnetic cycle. In these simulations, torsional oscillations are a fully nonlinear and truly MHD phenomenon.

## 2.4 Concluding remarks

In this paper, we have carried out a focused analysis of one of the implicit large-eddy MHD simulation of solar convection computed by Ghizaru, Charbonneau, and Smolarkiewicz (2010) [18] (see also Racine *et al.*, 2011 [42]; Charbonneau and Smolarkiewicz, 2012 [9]). To the best of our knowledge, these simulations remain unique in generating a spatially well-organized large-scale magnetic field component undergoing regular polarity reversals in a manner resembling in many ways the solar magnetic cycle. We have shown that a well-defined rotational torsional oscillation signal is present in the simulation, showing a high degree of similarity with those observed in the Sun, including: (1) frequency twice that of the magnetic cycle; (2) greater amplitudes in po-

lar and subsurface regions, peaking at a few nHz; (3) peak prograde phase coinciding approximately with the peak in large-scale magnetic field; (4) diverging double-branch latitudinal structure; (5) depth-independent phase at most latitudes.

We investigated rotational dynamics by first computing from the simulation output the various contributions to angular momentum fluxes, in the MHD simulation as well as a parent, unmagnetized simulation otherwise operating under the same numerical and physical parameter settings. We could show that in the MHD simulation, the presence of a large-scale cyclic magnetic field drives torsional oscillations not just directly through the associated large-scale magnetic torque, but also indirectly by modulating the other forces influencing zonal dynamics, most notably the transport of angular momentum by meridional flow. In fact, *all* force components driving the zonal flows undergo cyclic variations driven by the magnetic cycle, including the nominally “small-scale” Reynolds and Maxwell stresses.

We also examined the dynamical character of the rotational coupling between the convecting layers and underlying stably stratified fluid layers. Because of the low-dissipative properties of the numerical scheme underlying the simulations, a tachocline-like shear layer builds up immediately beneath the nominal base of the convective layers, within which significant radial and latitudinal cyclically-varying fluxes of angular momentum develop. The net radial flux is determined by a competition between the meridional flow and Maxwell stresses within the tachocline ( $0.7 \leq r/R \leq 0.718$ ) and by the magnetic torque and Maxwell stresses below. The latitudinal flux shows a strong cyclic signal, in phase with the magnetic cycle. It is dominated by the meridional flow within the tachocline, and by the large-scale magnetic torque below. The upper part of the stable layer is here an important player in setting the global cycle of angular momentum redistribution—and thus torsional oscillations—within the convection zone (on these issues see also Gilman, Morrow, and DeLuca, 1989 [21]).

Turning to a simple analysis of the energetics of torsional oscillations, we could also show that the primary direct power source for torsional oscillations arising in the simulation is the action of the Coriolis force on large-scale meridional fluid motion, with Reynolds stresses acting to oppose these oscillations at most phases of the cycle. Sur-

prisingly, direct driving by the large-scale magnetic torque makes only a minor contribution. This is in agreement with a parallel investigation by Passos, Charbonneau, and Beaudoin (2012) [38], who carried out a similar energy analysis for the meridional flow and could show that magnetic driving of this flow represented the primary sink of magnetic energy. This suggests that saturation of global dynamo action in this simulation occurs through the magnetic driving of flows on large spatial scales, magnetic energy being first diverted into the meridional components, and subsequently, through angular momentum conservation, into torsional oscillations, where it eventually damps through turbulent stresses.

This state of affairs, should it carry over the real Sun, has interesting consequences with regards to attempt to use fluctuations in large-scale flows as precursors to the solar cycle amplitude. More specifically, taken jointly with the results presented in Passos, Charbonneau, and Beaudoin (2012) [38], our analysis suggests that fluctuations in the meridional flow may be better potential precursors than torsional oscillations, because the bulk of magnetic driving of large-scale flows occurs on and through this flow component. Re-analysis of extant surface Doppler measurements has now allowed to reconstruct variations of the surface latitudinal flow back to the beginning of cycle 22 [13, 49], and has shown that significant cycle-to-cycle variations indeed exist. We are currently pushing our simulations much further in time, as well as under different parameter regimes, which should allow a statistically sound investigation of the precursor potential of torsional oscillations as well as surface latitudinal flow.

This work was supported by Canada’s Natural Sciences and Engineering Research Council, Research Chair Program, and by the Canadian Space Agency’s Space Science Enhancement Program (grant # 9SCIGRA-21). PB is also supported in part through a graduate fellowship from the Université de Montréal’s Physics department. The National Center for Atmospheric Research is supported by the National Science Foundation.

## CHAPITRE 3

### CONCLUSION

L'étude des oscillations torsionnelles est un domaine passionnant, où beaucoup d'espoirs y sont fondés concernant la prédictivité des cycles magnétiques. Toutefois, les fluctuations dans l'écoulement méridien pourraient être de meilleurs précurseurs que les oscillations torsionnelles, tel que discuté dans l'article. Néanmoins, la possibilité de reproduire de telles oscillations dans un modèle numérique nous indique certainement que le développement des simulations numériques progresse dans la bonne direction en ce qui concerne l'établissement d'une dynamique de type solaire dans la zone de convection.

L'explication intuitive concernant l'origine des oscillations torsionnelles (selon laquelle les champs magnétiques aux grandes échelles seraient les principaux moteurs à ce phénomène) est partiellement exacte. Les termes magnétiques dans l'équilibre des forces et des flux de moments cinétiques jouent un grand rôle dans la dynamique de la zone de convection, tout autant que les termes purement HD qui sont eux-mêmes modulés par la présence des champs magnétiques. Ce ne sont donc pas les effets directs des champs magnétiques qui détermineraient la formation des oscillations torsionnelles, mais bien une combinaison d'effets HD avec ces champs pour un problème entièrement MHD. Ceci redéfinit donc entièrement la façon de chercher à comprendre le phénomène en question.

Contrairement aux simulations présentées dans Brun (2002 ; 2004) [7, 8] et Miesch (2000) [35], notre modèle contient une partie de la zone stable. La présence de cette dernière se révèle très importante en ce qui concerne l'échange de moment cinétique entre celle-ci et la zone convective instable. Les oscillations torsionnelles pourraient découler d'un tel échange entre ces deux régions, puisqu'elles sont apparentes et de mêmes amplitudes à toutes les profondeurs de la zone de convection solaire. Dans les prochaines recherches, il faudrait s'atteler sérieusement à l'impact réel qu'a la zone stable sur la dynamique interne de la zone de convection.

La source de puissance générant les oscillations torsionnelles est principalement localisée dans la force de Coriolis exercée sur l'écoulement méridien aux grandes échelles modulé par la présence du champ magnétique. De façon étonnante, les champs magnétiques aux grandes échelles ne contribuent pas directement à l'échange d'énergie entre les champs magnétiques et l'écoulement zonal. La saturation de la dynamo provient de ce même écoulement méridien aux grandes échelles, puisque l'énergie magnétique y est d'abord insérée pour ensuite se retrouver dans les oscillations torsionnelles en raison de la conservation du moment cinétique et enfin se dissiper dans la turbulence de la zone convective. Ceci suggère que les oscillations torsionnelles seraient probablement un effet visible de la saturation de la dynamo solaire. Une analyse plus complète des échanges entre les différents réservoirs d'énergie serait très pertinente afin de comprendre pourquoi le Soleil possède un champ magnétique cyclique possédant cette période et cette intensité particulières plutôt que d'autres.

La quête de la compréhension du fonctionnement des oscillations torsionnelles en est une de longue haleine. Bien que les résultats présentés ici laissent présager une avancée considérable dans les connaissances de ce domaine, il reste beaucoup de travail à abattre avant de pouvoir expliquer en détail la dynamique du phénomène. Ceci implique de chercher à comprendre le fonctionnement de la zone convective en général et de bien déterminer l'impact qu'a la zone stable sur cette dernière. Il faut également tester avec plus de conviction les méthodes déjà établies dans le domaine de l'héliosismologie et tenter de regrouper les résultats générés par celles-ci avec ceux des simulations. En ce sens, j'espère pouvoir me rendre utile, puisqu'il y a une possibilité que je poursuive mes études au doctorat avec Paul Charbonneau, en collaboration avec Michael Thompson, un spécialiste de l'héliosismologie localisé au NCAR (National Center for Atmospheric Research), à Boulder, au Colorado, et directeur actuel de HAO (High Altitude Observatory).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. A. Balbus. A simple model for solar isorotational contours. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 395:2056–2064, juin 2009.
- [2] S. A. Balbus, J. Bonart, H. N. Latter et N. O. Weiss. Differential rotation and convection in the Sun. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 400:176–182, novembre 2009.
- [3] H. Balthasar et H. Woehl. Differential rotation and meridional motions of sunspots in the years 1940-1968. *Astron. Astrophys.*, 92:111–116, décembre 1980.
- [4] A. Bhatnagar et W. Livingston. *Fundamentals of solar astronomy*. avril 2005.
- [5] B. P. Brown, M. K. Browning, A. S. Brun, M. S. Miesch et J. Toomre. Rapidly Rotating Suns and Active Nests of Convection. *Astrophys. J.*, 689:1354–1372, décembre 2008.
- [6] M. K. Browning, M. S. Miesch, A. S. Brun et J. Toomre. Dynamo Action in the Solar Convection Zone and Tachocline : Pumping and Organization of Toroidal Fields. *Astrophys. J. Lett.*, 648:L157–L160, septembre 2006.
- [7] A. S. Brun, M. S. Miesch et J. Toomre. Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope. *Astrophys. J.*, 614:1073–1098, octobre 2004.
- [8] A. S. Brun et J. Toomre. Turbulent Convection under the Influence of Rotation : Sustaining a Strong Differential Rotation. *Astrophys. J.*, 570:865–885, mai 2002.
- [9] P. Charbonneau et P. K. Smolarkiewicz. EULAG-MHD : Simulation of the Global Solar Dynamo. *Journal of Computational Physics*, 2012.
- [10] J. Christensen-Dalsgaard. Helioseismology. *Reviews of Modern Physics*, 74:1073–1129, novembre 2002.
- [11] E. Covas, R. Tavakol et D. Moss. Dynamical variations of the differential rotation in the solar convection zone. *Astron. Astrophys.*, 371:718–730, mai 2001.

- [12] E. Covas, R. Tavakol, D. Moss et A. Tworkowski. Torsional oscillations in the solar convection zone. *Astron. Astrophys.*, 360:L21–L24, août 2000.
- [13] M. Dikpati, P. A. Gilman, G. de Toma et R. K. Ulrich. Impact of changes in the Sun’s conveyor-belt on recent solar cycles. *Geophys. Res. Lett.*, 37:14107, juillet 2010.
- [14] J. A. Domaradzki, Z. Xiao et P. K. Smolarkiewicz. Effective eddy viscosities in implicit large eddy simulations of turbulent flows. *Physics of Fluids*, 15:3890–3893, décembre 2003.
- [15] J. A. Eddy. *The Sun, the Earth and Near-Earth Space : A Guide to the Sun-Earth System*. 2009.
- [16] R. Erdélyi, K. Petrovay, B. Roberts et M. Aschwanden. *Turbulence, Waves and Instabilities in the Solar Plasma*. décembre 2003.
- [17] Y. Fan. Modeling the Subsurface Evolution of Active-Region Flux Tubes. Dans M. Dikpati, T. Arentoft, I. González Hernández, C. Lindsey, & F. Hill, éditeur, *Solar-Stellar Dynamos as Revealed by Helio- and Asteroseismology : GONG 2008/SOHO 21*, volume 416 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 489, décembre 2009.
- [18] M. Ghizaru, P. Charbonneau et P. K. Smolarkiewicz. Magnetic Cycles in Global Large-eddy Simulations of Solar Convection. *Astrophys. J. Lett.*, 715:L133–L137, juin 2010.
- [19] P. A. Gilman. Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. II - Dynamos with cycles and strong feedbacks. *Astrophys. J. Suppl. Series*, 53:243–268, octobre 1983.
- [20] P. A. Gilman et J. Miller. Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. *Astrophys. J. Suppl. Series*, 46:211–238, juin 1981.

- [21] P. A. Gilman, C. A. Morrow et E. E. DeLuca. Angular momentum transport and dynamo action in the sun - Implications of recent oscillation measurements. *Astrophys. J.*, 338:528–537, mars 1989.
- [22] L. Gizon et M. Rempel. Observation and Modeling of the Solar-Cycle Variation of the Meridional Flow. *Solar Phys.*, 251:241–250, septembre 2008.
- [23] F. Hill, R. Howe, R. Komm, J. Christensen-Dalsgaard, T. P. Larson, J. Schou et M. J. Thompson. Large-scale Zonal Flows During the Solar Minimum – Where Is Cycle 25 ? Dans *AAS/Solar Physics Division Abstracts #42*, page 1610, mai 2011.
- [24] R. Howard et B. J. Labonte. The sun is observed to be a torsional oscillator with a period of 11 years. *Astrophys. J. Lett.*, 239:L33–L36, juillet 1980.
- [25] R. Howe. Solar Interior Rotation and its Variation. *Living Reviews in Solar Physics*, 6:1, février 2009.
- [26] R. Howe, F. Hill, R. Komm, J. Christensen-Dalsgaard, T. P. Larson, J. Schou, M. J. Thompson et R. Ulrich. The torsional oscillation and the new solar cycle. *Journal of Physics Conference Series*, 271(1):012074, janvier 2011.
- [27] P. J. Käpylä, M. J. Korpi, A. Brandenburg, D. Mitra et R. Tavakol. Convective dynamos in spherical wedge geometry. *Astronomische Nachrichten*, 331:73, janvier 2010.
- [28] R. Komm, R. Howe, F. Hill, I. González Hernández et D. Haber. Solar-cycle variation of zonal and meridional flow. *Journal of Physics Conference Series*, 271(1): 012077, janvier 2011.
- [29] J. W. Leibacher et R. F. Stein. A New Description of the Solar Five-Minute Oscillation. *Astrophys. Lett.*, 7:191–192, 1971.
- [30] R. B. Leighton, R. W. Noyes et G. W. Simon. Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report. *Astrophys. J.*, 135:474, mars 1962.



- [31] L. G Margolin et W. J Rider. *Implicit Large Eddy Simulation : Computing Turbulent Fluid Dynamics*. 2007.
- [32] L. G. Margolin, W. J. Rider et F. F. Grinstein. Modeling turbulent flow with implicit LES. *Journal of Turbulence*, 7:15, 2006.
- [33] L. G. Margolin, P. K. Smolarkiewicz et Z. Sorbjan. Large-eddy simulations of convective boundary layers using nonoscillatory differencing. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 133:390–397, 1999.
- [34] M. S. Miesch, A. S. Brun et J. Toomre. Solar Differential Rotation Influenced by Latitudinal Entropy Variations in the Tachocline. *Astrophys. J.*, 641:618–625, avril 2006.
- [35] M. S. Miesch, J. R. Elliott, J. Toomre, T. L. Clune, G. A. Glatzmaier et P. A. Gilman. Three-dimensional Spherical Simulations of Solar Convection. I. Differential Rotation and Pattern Evolution Achieved with Laminar and Turbulent States. *Astrophys. J.*, 532:593–615, mars 2000.
- [36] W. M. Mitchell. The history of the discovery of the solar spots. *Popular Astronomy*, 24:562, 1916.
- [37] D. J. Mullan. *Physics of the Sun : A First Course*. CRC Press, 2009.
- [38] D. Passos, P. Charbonneau et P. Beaudoin. An exploration of non-kinematic effects in flux transport dynamos. *Solar Phys.*, 2012.
- [39] K. J. H. Phillips. *Guide to the sun*. 1992.
- [40] J. M. Prusa et P. K. Smolarkiewicz. An all-scale anelastic model for geophysical flows : dynamic grid deformation. *Journal of Computational Physics*, 190:601–622, septembre 2003.
- [41] J. M. Prusa, P. K. Smolarkiewicz et A. A. Wyszogrodzki. EULAG, a Computational Model for Multiscale Flows. *Computers & Fluids*, décembre 2007.

- [42] É. Racine, P. Charbonneau, M. Ghizaru, A. Bouchat et P. K. Smolarkiewicz. On the Mode of Dynamo Action in a Global Large-eddy Simulation of Solar Convection. *Astrophys. J.*, 735:46, juillet 2011.
- [43] M. Rempel. Solar Differential Rotation and Meridional Flow : The Role of a Sub-adiabatic Tachocline for the Taylor-Proudman Balance. *Astrophys. J.*, 622:1320–1332, avril 2005.
- [44] M. Rempel. Origin of Solar Torsional Oscillations. *Astrophys. J.*, 655:651–659, janvier 2007.
- [45] G. Ruediger. *Differential rotation and stellar convection. Sun and the solar stars.* 1989.
- [46] M. Schüssler. The solar torsional oscillation and dynamo models of the solar cycle. *Astron. Astrophys.*, 94:L17, février 1981.
- [47] P. K. Smolarkiewicz. Multidimensional positive definite advection transport algorithm : an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50: 1123–1144, avril 2006.
- [48] R. K. Ulrich. The Five-Minute Oscillations on the Solar Surface. *Astrophys. J.*, 162:993, décembre 1970.
- [49] R. K. Ulrich. Solar Meridional Circulation from Doppler Shifts of the Fe I Line at 5250 Å as Measured by the 150-foot Solar Tower Telescope at the Mt. Wilson Observatory. *Astrophys. J.*, 725:658–669, décembre 2010.
- [50] H. Yoshimura. Solar cycle Lorentz force waves and the torsional oscillations of the sun. *Astrophys. J.*, 247:1102–1112, août 1981.

## Annexe I

### Équations MHD moyennées en longitude

L'équation de Navier-Stokes sous forme conservative pour un fluide dans l'approximation anélastique (impliquant particulièrement  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$ ) comprenant la force de Lorentz et la rotation s'écrit

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \quad (\text{I.1})$$

avec  $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$  où  $\mathbf{V}$  est le champ de vitesse du fluide dans le référentiel en rotation du Soleil,  $\boldsymbol{\Omega}$  est la vitesse angulaire moyenne du Soleil,  $\mathbf{R}$  est le vecteur reliant le centre du Soleil à la position où nous analysons le comportement du fluide et  $\rho$  est le profil de densité, celui-ci ne dépendant que du rayon.

Nous sommes intéressés par la moyenne longitudinale de la composante en  $\phi$  de l'équation (I.1). Appliquons donc l'opérateur  $\langle \dots \rangle$  sur chacun des côtés de l'équation en  $\phi$ , où cet opérateur représente une moyenne zonale :

$$\langle f(r, \theta, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \phi, t) d\phi , \quad (\text{I.2})$$

avec  $\theta$  l'angle sphérique polaire (contrairement à l'article où cette même quantité représente la latitude). Nous obtenons donc

$$\left\langle \frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial t} \right\rangle + \langle [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})]_\phi \rangle = \frac{-1}{r \sin \theta} \left\langle \frac{\partial P}{\partial \phi} \right\rangle + \frac{1}{\mu} \langle [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_\phi \rangle . \quad (\text{I.3})$$

Nous réécrivons le dernier terme du membre de droite en utilisant l'identité vectorielle

$$\nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{C} + (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{C}) + \mathbf{C} \times (\nabla \times \mathbf{E}) . \quad (\text{I.4})$$

Ici,  $\mathbf{C} = \mathbf{E} = \mathbf{B}$ , donc

$$\nabla B^2 = 2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) , \quad (\text{I.5})$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 . \quad (\text{I.6})$$

En insérant cette relation dans l'équation (I.3), nous obtenons

$$\left\langle \frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial t} \right\rangle + \langle [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})]_\phi \rangle = \frac{-1}{r \sin \theta} \left\langle \frac{\partial P}{\partial \phi} \right\rangle + \frac{1}{\mu} \langle [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2]_\phi \rangle , \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial t} \right\rangle + \langle [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})]_\phi \rangle = \\ & \frac{-1}{r \sin \theta} \left\langle \frac{\partial P}{\partial \phi} \right\rangle + \frac{1}{\mu} \langle \hat{\phi} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{1}{2\mu} \frac{1}{r \sin \theta} \left\langle \frac{\partial B^2}{\partial \phi} \right\rangle . \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Puisque la moyenne spatiale en longitude se fait sur une grande échelle, nous pouvons commuter la moyenne avec la dérivée. En effectuant la moyenne, nous enlevons toute variation en longitude, faisant ainsi disparaître tous les termes comprenant  $\frac{\partial}{\partial \phi}$ . Nous pouvons également commuter la moyenne spatiale avec la dérivée temporelle, ce qui conduit à

$$\frac{\partial \langle \rho U_\phi \rangle}{\partial t} + \langle \hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})] \rangle = \frac{1}{\mu} \langle \hat{\phi} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle . \quad (\text{I.9})$$

Nous aimerions exprimer cette équation sous une forme dite conservative, soit

$$\frac{\partial \langle \rho U_\phi \rangle}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 . \quad (\text{I.10})$$

Pour y parvenir, nous devons transformer l'équation (I.9). Réécrivons le deuxième terme du membre de gauche de cette équation :

$$\hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})] = \nabla \cdot (\hat{\phi} \cdot \rho \mathbf{U} \mathbf{U}) - \rho \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{\phi} . \quad (\text{I.11})$$

Nous utilisons l'identité

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \left( \mathbf{C} \cdot \nabla A_r - \frac{C_\theta A_\theta}{r} - \frac{C_\phi A_\phi}{r} \right) \hat{r} + \\ &+ \left( \mathbf{C} \cdot \nabla A_\theta - \frac{C_\phi A_\phi}{r} \cot \theta + \frac{C_\theta A_r}{r} \right) \hat{\theta} + \left( \mathbf{C} \cdot \nabla A_\phi + \frac{C_\phi A_r}{r} + \frac{C_\theta A_\theta}{r} \cot \theta \right) \hat{\phi} , \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

pour réécrire

$$\hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})] = \nabla \cdot (\rho U_\phi \mathbf{U}) + \rho \mathbf{U} \cdot \left( -\frac{U_\phi}{r} \hat{r} - \frac{U_\phi}{r} \cot \theta \hat{\theta} \right), \quad (\text{I.13})$$

$$= \nabla \cdot (\rho U_\phi \mathbf{U}) - \frac{\rho U_\phi}{r \sin \theta} \mathbf{U} \cdot (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}), \quad (\text{I.14})$$

$$= \nabla \cdot (\rho U_\phi \mathbf{U}) + \frac{\rho U_\phi}{r \sin \theta} \mathbf{U} \cdot \nabla (r \sin \theta), \quad (\text{I.15})$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta \rho U_\phi \mathbf{U}), \quad (\text{I.16})$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})] \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta \rho \langle U_\phi \mathbf{U} \rangle). \quad (\text{I.17})$$

Maintenant, réécrivons le membre de droite de l'équation (I.9) :

$$\hat{\phi} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] = \hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B})], \quad (\text{I.18})$$

$$= \hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B})], \quad (\text{I.19})$$

où la dernière égalité est vraie puisque le champ magnétique a une divergence nulle. Nous obtenons donc un terme semblable au membre de gauche de l'équation (I.11). Développons-le de la même manière :

$$\hat{\phi} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] = \hat{\phi} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B})], \quad (\text{I.20})$$

$$= \nabla \cdot (B_\phi \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\phi}, \quad (\text{I.21})$$

$$= \nabla \cdot (B_\phi \mathbf{B}) + \frac{B_\phi}{r \sin \theta} \mathbf{B} \cdot \nabla (r \sin \theta), \quad (\text{I.22})$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta B_\phi \mathbf{B}), \quad (\text{I.23})$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\phi} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta \langle B_\phi \mathbf{B} \rangle). \quad (\text{I.24})$$

Nous sommes maintenant en mesure de réécrire l'équation (I.9) sous une autre forme :

$$\frac{\partial \langle \rho U_\phi \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta \rho \langle U_\phi \mathbf{U} \rangle) = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left[ \frac{r \sin \theta}{\mu} \langle B_\phi \mathbf{B} \rangle \right], \quad (\text{I.25})$$

$$\frac{\partial \langle \rho U_\phi \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left[ r \sin \theta \left( \rho \langle U_\phi \mathbf{U} \rangle - \frac{1}{\mu} \langle B_\phi \mathbf{B} \rangle \right) \right] = 0 , \quad (\text{I.26})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle \rho U_\phi \rangle}{\partial t} - \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left[ r \sin \theta \left( \frac{1}{\mu} \langle B_\phi \mathbf{B} \rangle - \rho \langle U_\phi \mathbf{U} \rangle \right) \right] = 0 . \quad (\text{I.27})$$

Il est possible d'effectuer une séparation d'échelles spatiales des différents champs impliqués. Ceci implique séparer les champs en une composante moyenne qui est axisymétrique (ne dépend pas de la longitude) et une composante turbulente.

Réécrivons les termes en utilisant

$$\mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, t) + \mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) , \quad (\text{I.28})$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{b}(r, \theta, t) + \mathbf{b}'(r, \theta, \phi, t) , \quad (\text{I.29})$$

avec  $\mathbf{u}$  l'écoulement moyen,  $\mathbf{b}$  le champ magnétique moyen,  $\mathbf{u}'$  les fluctuations de l'écoulement et  $\mathbf{b}'$  les fluctuations du champ. Or

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u} , \langle \mathbf{u}' \rangle = 0 , \langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{b} , \langle \mathbf{b}' \rangle = 0 , \quad (\text{I.30})$$

puisque une moyenne longitudinale sur un écoulement moyen ou un champ moyen donne cette même quantité et une telle moyenne sur une perturbation est nulle (à cause de l'écart des échelles de grandeur). Cependant, la moyenne du produit de deux perturbations n'est pas nulle. Réécrivons l'équation (I.27) en utilisant les identités précédentes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho (u_\phi + u'_\phi) \rangle}{\partial t} - \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left[ r \sin \theta \left( \frac{1}{\mu} \langle (b_\phi + b'_\phi)(\mathbf{b} + \mathbf{b}') \rangle - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho \langle (u_\phi + u'_\phi)(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \rangle \right) \right] = 0 , \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

$$\frac{\partial (\rho u_\phi)}{\partial t} - \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left[ r \sin \theta \left( \frac{1}{\mu} (b_\phi \mathbf{b} + \langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle) - \rho (u_\phi \mathbf{u} + \langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle) \right) \right] = 0 . \quad (\text{I.32})$$

Or, nous savons que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} , \quad (\text{I.33})$$

et

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' , \quad (\text{I.34})$$

car il n'y a pas de perturbation dans le terme  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Donc, le terme en  $u_\phi \mathbf{u}$  devient

$$u_\phi \mathbf{u} = [\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]_\phi (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) , \quad (\text{I.35})$$

$$= v_\phi \mathbf{v} + v_\phi (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{v} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]_\phi + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]_\phi , \quad (\text{I.36})$$

$$= v_\phi \mathbf{v} + v_\phi \Omega r \sin \theta \hat{\phi} + \Omega r \sin \theta \mathbf{v} + \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \hat{\phi} . \quad (\text{I.37})$$

Tous les termes en  $\hat{\phi}$  ont une divergence nulle : nous pouvons donc les supprimer, puisqu'ils n'auront aucun impact dans l'équation (I.32) et ils ne contribueront clairement pas au transport local de moment cinétique. Nous obtenons alors

$$u_\phi \mathbf{u} = (v_\phi + \Omega r \sin \theta) \mathbf{v} , \quad (\text{I.38})$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial t} - \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left[ r \sin \theta \left( \frac{1}{\mu} (b_\phi \mathbf{b} + \langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle) - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho ((v_\phi + \Omega r \sin \theta) \mathbf{v} + \langle v'_\phi \mathbf{v}' \rangle) \right) \right] = 0 , \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

Nous constatons que  $\partial_t(\rho v_\phi)$  représente une densité volumique de force en direction longitudinale. Les quatre termes dans la divergence représentent les contributions majeures à l'équation du mouvement zonale.

Nous avons

$$F_{\text{Reyn}}(r, \theta, t) = \frac{-1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta \rho \langle v'_\phi \mathbf{v}' \rangle) , \quad (\text{I.40})$$

représentant la contribution de la force liée au stress de Reynolds. Il y a aussi

$$F_{\text{Circ}}(r, \theta, t) = \frac{-1}{r \sin \theta} \nabla \cdot (r \sin \theta \rho (v_\phi + \Omega r \sin \theta) \mathbf{v}) , \quad (\text{I.41})$$

étant équivalente à la composante longitudinale de la force de Coriolis agissant sur la

circulation méridienne. Également,

$$F_{\text{Maxw}}(r, \theta, t) = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left( \frac{r \sin \theta}{\mu} \langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle \right), \quad (\text{I.42})$$

illustre la force zonale reliée au stress de Maxwell, qui est la composante turbulente de la force de Lorentz. Finalement,

$$F_{\text{Magn}}(r, \theta, t) = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \cdot \left( \frac{r \sin \theta}{\mu} b_\phi \mathbf{b} \right), \quad (\text{I.43})$$

est lié à la contribution des champs magnétiques aux grandes échelles. Il faut se rappeler que toutes les quantités définies ici sont en fait des densités de force mesurées en  $\text{Nm}^{-3}$ .

Si nous ne prenons que les termes se trouvant dans les divergences et que nous les intégrons par rapport à  $r$  ou  $\theta$ , nous obtenons le flux de moment cinétique à travers des cônes de différentes latitudes ou à travers des coquilles à différents rayons. Par exemple, pour les flux apparentés aux stress de Reynolds, nous avons

$$I_{\text{Reyn},r}(r, t) = - \int_0^\pi r \sin \theta \rho \langle v'_\phi \mathbf{v}' \rangle r^2 \sin \theta d\theta, \quad (\text{I.44})$$

$$I_{\text{Reyn},\theta}(\theta, t) = - \int_{r_{\text{bas}}}^{r_{\text{haut}}} r \sin \theta \rho \langle v'_\phi \mathbf{v}' \rangle r \sin \theta dr, \quad (\text{I.45})$$

avec  $\mathcal{F}_{\text{Reyn},r}$  le flux de moment cinétique traversant des coquilles de différents rayons à chaque instant,  $\mathcal{F}_{\text{Reyn},\theta}$  le flux traversant des cônes de différentes latitudes à chaque instant,  $r_{\text{bas}}$  la distance du centre du Soleil où est située la base de la zone d'intégration de la simulation et  $r_{\text{haut}}$  la distance du centre du Soleil où est située la fin de la zone d'intégration.



## Annexe II

### Développement des puissances

Le travail exécuté par une densité volumique de force sur un élément de fluide, tout au long d'une distance  $d\mathbf{x}$ , se traduit par :

$$dW(r, \theta, t) = \mathbf{F}(r, \theta, t) \cdot d\mathbf{x}(r, \theta, t) . \quad (\text{II.1})$$

Si nous désirons obtenir le travail instantané, il suffit de diviser par une quantité infinitésimale  $dt$  de chaque côté de l'équation précédente pour obtenir

$$\frac{dW}{dt}(r, \theta, t) = \mathbf{F}(r, \theta, t) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(r, \theta, t) , \quad (\text{II.2})$$

ou encore

$$P(r, \theta, t) = \mathbf{u}(r, \theta, t) \cdot \mathbf{F}(r, \theta, t) , \quad (\text{II.3})$$

avec  $P(r, \theta, t)$  la densité de puissance volumique.

Nous sommes intéressés par la contribution longitudinale, puisque c'est dans cette direction que nous observons les oscillations torsionnelles. Pour les cas spéciaux de la force de Lorentz et sa perturbation (c'est-à-dire le champ magnétique aux grandes échelles et le stress de Maxwell), nous développons l'équation d'induction MHD et effectuons un produit scalaire avec le champ magnétique pour trouver un terme ayant la même forme que l'équation (II.3). Avec chaque terme ayant leur sens habituel et  $\eta$  étant la diffusivité magnétique, voici le développement adéquat :

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B})] , \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) . \quad (\text{II.5})$$

Nous utilisons l'identité

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{D}) , \quad (\text{II.6})$$

pour modifier le premier terme à la droite de l'égalité de l'équation (II.5) :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) . \quad (\text{II.7})$$

Nous savons que

$$\varepsilon_B = \frac{B^2}{2\mu_0} , \quad (\text{II.8})$$

avec  $\varepsilon_B$  étant la densité d'énergie magnétique. Utilisant

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{D} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{C} , \quad (\text{II.9})$$

sur le deuxième terme à la droite de l'égalité de l'équation (II.5), nous obtenons

$$\mu_0 \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) - \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (\text{II.10})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) - \mu_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_B - \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (\text{II.11})$$

avec  $\mathbf{F}_B$  la force de Lorentz représentée par  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  dans l'approximation MHD, où  $\mathbf{J}$  est la densité de courant électrique.

L'équation (II.11) nous informe que si  $\mathbf{F}_B$  est dans la même direction que  $\mathbf{u}$ , alors  $\partial_t \varepsilon_B$  diminue, indiquant un transfert d'énergie magnétique vers les autres types d'énergies (comme l'énergie liée à la circulation). Si  $\mathbf{F}_B$  est en sens inverse à l'écoulement,  $\partial_t \varepsilon_B$  augmente, ce qui veut dire que l'énergie voyage de la circulation (entre autre) aux champs magnétiques. Évidemment, pour obtenir la puissance, nous n'avons qu'à intégrer l'équation (II.11) sur un volume.

Tentons de réécrire les autres termes de l'équation (II.11) en intégrant sur le volume.

Tout d'abord, nous pouvons supposer que

$$\nabla \cdot ((\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) , \quad (\text{II.12})$$

si le fluide bouge très lentement, c'est-à-dire si cela lui requiert un temps plus long que le temps de relaxation pour parcourir une distance caractérisant les variations de l'écoulement et du champ magnétique (ce qui est toujours le cas dans la zone de convection solaire). Ceci est cohérent avec l'équation d'induction MHD.

En intégrant sur un volume  $V$ , en utilisant le théorème de la divergence, en posant  $A$  une surface frontière fermée et en définissant un vecteur unitaire normal à la surface frontière  $\hat{n}$ , ce terme se réécrit

$$-\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{n} dA = 0 . \quad (\text{II.13})$$

La dernière égalité est vraie si nous considérons que nous pouvons imposer notre surface d'intégration (sphérique) à l'endroit que nous désirons en autant que le Soleil soit en son centre. En effet, étant donné que le champ électrique décroît au mieux en  $r^{-2}$ , que le champ magnétique décroît en  $r^{-3}$  et que l'intégration contribue en  $r^2$  au terme, avec  $r$  la distance parcourue à partir du Soleil, ce terme sera ultimement proportionnel à  $r^{-3}$ . Si nous imposons notre surface très loin du Soleil ( $r \rightarrow \infty$ ) et qu'elle ne contient pas d'autres étoiles, nous pouvons assumer que ce terme sera négligeable.

Le dernier terme de l'équation (II.11) peut s'exprimer ainsi :

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot ((\eta \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) + (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) , \quad (\text{II.14})$$

$$= \nabla \cdot (\eta \mu_0 \mathbf{F}_B) + \eta (\nabla \times \mathbf{B})^2 , \quad (\text{II.15})$$

$$= \mu_0 \nabla \cdot (\eta \mathbf{F}_B) + \mu_0 \sigma^{-1} J^2 , \quad (\text{II.16})$$

avec  $\sigma$  la conductivité électrique provenant de la relation

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} , \quad (\text{II.17})$$

où  $\mathbf{J}$  provient de la loi d'Ampère en assumant qu'il n'y a aucune batterie s'allumant ou s'éteignant près du Soleil !

Donc, la forme de l'équation (II.11), lorsqu'elle est intégrée en volume, devient

$$\mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}_B}{\partial t} = -\mu_0 \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_B) dV - \mu_0 \oint_A \eta \mathbf{F}_B \cdot \hat{n} dA - \mu_0 \int_V \sigma^{-1} J^2 dV, \quad (\text{II.18})$$

avec  $\mathcal{E}_B$  l'énergie magnétique. Le second terme du membre de droite est nul : il suffit de faire un raisonnement similaire à celui suivant l'équation (II.13). Nous obtenons donc

$$\frac{\partial \chi_B}{\partial t} = - \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_B) dV - \int_V \sigma^{-1} J^2 dV, \quad (\text{II.19})$$

où nous remarquons la contribution du travail effectué par la force de Lorentz sur l'écoulement ainsi que celle de la dissipation ohmique.

Nous pouvons trouver une relation similaire à l'équation (II.11) lorsque nous multiplions l'équation MHD de Navier-Stokes dans un référentiel en rotation avec le champ de vitesse :

$$\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) + \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \quad (\text{II.20})$$

Si nous ne considérons que la contribution longitudinale de la vitesse, deux termes du côté droit de l'équation (II.20) disparaissent. Le gradient de pression ne comporte aucune composante en longitude, tout comme le terme de l'accélération gravitationnelle. Le dernier terme (comprenant le tenseur de viscosité) est déjà nul, puisque le modèle ne

contient aucune viscosité implémentée explicitement. Ce qui reste est

$$\mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \quad (\text{II.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} &= -2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} &= -2\rho \mathbf{u} \cdot \left( \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Nous savons que

$$\varepsilon_F = \frac{\rho u^2}{2} , \quad (\text{II.24})$$

avec  $\varepsilon_F$  étant la densité d'énergie provenant de l'écoulement. Utilisant

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{F}) = (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{E} , \quad (\text{II.25})$$

sur le second terme dans le membre de droite de l'équation (II.23), nous obtenons

$$\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial t} = -2\rho \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial t} = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_F + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_B . \quad (\text{II.27})$$

L'équation (II.27) confirme ce que nous avons aperçu dans l'équation (II.11). Également, si  $\mathbf{F}_F$  est dans la même direction que l'écoulement, cela diminue l'énergie de l'écoulement. Lorsqu'ils ne sont pas dans la même direction, cela augmente cette même énergie (c'est le contraire de ce qui se passe avec  $\mathbf{F}_B$ ). Concrètement, le terme  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_F$  assure le transfert d'énergie entre deux réservoirs : magnétique et cinétique.